

UNIVERSIDAD DE LA REPÚBLICA

TESIS DE MAESTRÍA

Grafos Jahangir

Annabella Zapattini

Orientador: Diego Bravo

21 de febrero de 2019

Maestría en Matemática
Facultad de Ciencias
Universidad de la República
Uruguay

Agradecimientos

Quiero agradecer a todos y cada uno de los que fueron parte de este proceso en el que se me ocurrió querer aprender matemática.

En particular a Diego por la paciencia, dedicación y orientación, y a Flor y Marcelo por el apoyo en los momentos de crisis, que no fueron pocos.

A todos los compañeros con los que estudié en algún momento, de los que aprendí muchísimo.

A mi familia, que varias veces les dije no, por tener que estudiar.

Y muy en especial a Ale, por bancar todo el estrés y las ausencias durante todos estos años y a Maite, que desde la panza, me acompañó bailando estas últimas noches de trabajo.

Resumen

Los grafos tipo rueda se definen a partir del Ciclo, agregando un nuevo vértice y nuevas aristas con determinadas condiciones. Este trabajo presenta algunas propiedades de su espectro y su energía, llegando, en algunos casos, a calcularlos.

Abstract

The Wheel Related Graphs are defined from de Cycle, adding a new vertice and new edges with certain conditions. This work presents some spectral and energy properties, arriving, in some cases, to calculate them.

Palabras Clave: grafos, grafo Jahangir, matriz, espectro, energía.

Key Words: graphs, Jahangir graph, matrix, spectra, energy.

Índice

1. Introducción	1
2. Preliminares	3
2.1. Grafos	3
2.2. Subgrafos	5
2.3. Matriz de adyacencia	8
2.4. Matrices simétricas	12
2.5. Vectores propios	14
2.6. Matrices semidefinidas positivas	16
2.7. Funciones subarmónicas	17
2.8. Teorema de Perron-Frobenius	21
2.9. Descomposición espectral	23
2.10. Entrelazado	24
2.11. Particiones equitativas	28
2.12. Espectro de algunos grafos	32
2.13. Energía de grafos	33
2.13.1. Algunas cotas para la energía de grafos	34
3. Espectro y energía de los grafos Jahangir	39
3.1. Grafos tipo rueda	39
3.2. Cálculo de trazas de algunas potencias de $J_{n,m}$	41
3.2.1. Trazas de $J_{m,n}^2$ y $J_{m,n}^3$	41
3.2.2. Traza de $J_{m,n}^4$	41
3.3. Valores propios de $J_{m,n}$ heredados de C_n	43
3.4. Propiedades de los restantes valores propios de $J_{m,n}$	47
3.5. Particiones equitativas de $J_{m,n}$	50
3.5.1. Polinomio característico de las matrices del cociente para m par	53
3.5.2. Polinomio característico de las matrices del cociente para m impar	56
3.6. Espectros y Energías para casos particulares de m	59
3.6.1. Espectro y Energía de $J_{2,n}$	59
3.6.2. Espectro y Energía $J_{4,n}$	60
3.6.3. Espectro y Energía de $J_{6,n}$	61
3.7. Propiedades de los radios espectrales de los $J_{m,n}$	63
3.7.1. Cotas para los radios espectrales de $J_{m,n}$	63
3.7.2. Comparación de los radios espectrales de los Jahangir con igual razón $\frac{n}{m}$	63
3.8. Cotas para la Energía de $J_{m,n}$	65
3.9. Trabajo a futuro	66

Referencias

67

1. Introducción

La Teoría Espectral de Grafos relaciona el Álgebra Lineal con La Teoría de Grafos, asociándole a un grafo, distintos tipos de matrices. Lo cual permite estudiar, en muchos casos, la estructura del grafo a partir de la estructura de su matriz y, particularmente, de su espectro.

Dentro de las matrices que se le asocian a un grafo, la matriz de adyacencia es la que surge más naturalmente:

Sea X un grafo. Su matriz de adyacencia $A(X) = (a_{ij})$ es una matriz con filas y columnas indexadas por los vértices tal que $a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i \sim j \\ 0 & \text{si } i \not\sim j \end{cases}$

Una de las propiedades más importantes de estas matrices es que son simétricas y, por lo tanto, su espectro siempre será real.

A partir del espectro de un grafo I. Gutman, en 1978, introduce el concepto de Energía de un grafo como

$$\mathcal{E}(X) = \sum_{i=1}^n |\lambda_i|,$$

siendo λ_i con $i = 1, \dots, n$ sus n valores propios. Este concepto nace en relación al concepto de π - electrón de una molécula.

Los grafos Jahangir ($J_{m,n}$), que se definen agregando un vértice al ciclo C_n y algunas aristas con determinadas condiciones, son definidos en [11]. Donde se ven algunas cotas para la Energía de $J_{2,n}$ y se compara con la Energía de otros grafos.

En este trabajo, enmarcado en la Teoría Espectral de Grafos, se exploran algunas propiedades de $J_{m,n}$, llegando a probar que la gran mayoría de sus valores propios se heredan del grafo ciclo C_n .

En el capítulo 2 se definen conceptos y se muestran resultados ya conocidos del Álgebra Lineal y de la Teoría Espectral de Grafos. Los cuales, en su gran mayoría, son aplicados para llegar a los nuevos resultados.

El capítulo 3 comienza con la definición de los grafos tipo rueda, y se calculan las trazas de algunas potencias de $J_{m,n}$. Luego se ven cuáles son los valores propios heredados de C_n , así como algunos de los vectores propios que también hereda $J_{m,n}$. Se continúa con algunas propiedades que verifican los restantes valores propios.

El capítulo continúa definiendo una partición equitativa de $J_{m,n}$. A partir de esto, se llega a una conjetura: *los restantes valores propios de $J_{m,n}$ son las raíces del polinomio característico de la matriz del cociente*. Luego, se calcula el espectro y la energía de $J_{m,n}$ para $m = 2, m = 4$ y $m = 6$, mostrando, a partir del cálculo del polinomio característico de la matriz del cociente, que se verifica la conjetura en estos casos.

También se ven propiedades de los radios espectrales. Por último, se encuentran cotas superiores e inferiores para la Energía de $J_{m,n}$ que dependen de los valores de m y n .

El capítulo finaliza, dejando algunas posibles líneas de investigación futura, como es, además de seguir estudiando la conjetura, intentar generalizar la definición de los grafos Jahangir agregando un vértice y aristas con determinado patrón a otros grafos que no sean ciclos.

2. Preliminares

La mayor parte del desarrollo de este capítulo se realizó a partir de [3] y de [4].

2.1. Grafos

Definición 2.1.1

Un **grafo** (o grafo simple) X consiste en un conjunto de vértices $V(X)$ y de un conjunto de aristas $E(X)$, donde una **arista** es un par de distintos vértices de X , que anotamos xy o $\{x, y\}$.

Definición 2.1.2

Si xy es una arista, decimos que x e y son **adyacentes** o que y es **vecino** de x , y anotamos $x \sim y$.

Definición 2.1.3

Dos grafos X e Y son **iguales** si tienen el mismo conjunto de vértices y aristas.

Definición 2.1.4

Dos grafos X e Y son **isomorfos** si existe una biyección $\varphi : V(X) \rightarrow V(Y)$ tal que $x \sim y$ en $X \Leftrightarrow \varphi(x) \sim \varphi(y)$ en Y . Decimos que φ es un **isomorfismo** de X a Y .

Observación 2.1.5

Como φ es una biyección, existe $\varphi^{-1} : V(Y) \rightarrow V(X)$, la cual es un isomorfismo de Y a X .

Definición 2.1.6

Un isomorfismo de un grafo X a sí mismo se llama **automorfismo**.

Si g es un automorfismo, anotamos x^g a $g(x)$.

Definición 2.1.7

El **complemento** \bar{X} de un grafo X tiene los mismo vértices que X , donde x e y son adyacentes en \bar{X} si y solo si no lo son en X .

Definición 2.1.8

Un grafo se llama **completo** si cada par de vértices son adyacentes. Anotamos K_n al grafo completo de n vértices.

Un grafo sin aristas, pero al menos con un vértice se llama **vacío**.

El grafo sin vértices ni aristas es el **grafo nulo**.

Definición 2.1.9

Un **digrafo** (o grafo dirigido) X consiste en un conjunto de vértices $V(X)$ y un conjunto de arcos $A(X)$, donde un **arco** (o arista dirigida) es un par ordenado de vértices.

Observación 2.1.10

Los grafos simples pueden pensarse como digrafos en donde cada arista xy está representando los dos arcos (x,y) y (y,x) .

Observación 2.1.11

A pesar que en la definición de grafos se permite que el conjunto de vértices sea infinito, no se considera este caso. Por lo tanto, todos los grafos con los que trabajaremos se asumirán finitos.

Definición 2.1.12

El **grado** de un vértice x es el número de vecinos de x . El **máximo/mínimo grado** de un grafo X es el máximo/mínimo de los valores de los grados de los vértices.

Observación 2.1.13

Si x es un vértice del grafo X y g es un automorfismo de X , entonces el vértice $y = x^g$ tiene el mismo grado que x .

Definición 2.1.14

Un grafo en que cada vértice tiene igual grado k se llama **regular de grado k** o **k -regular**.

Definición 2.1.15

Un grafo X es **bipartito** si su conjunto de vértices se puede separar en dos conjuntos V_1 y V_2 tal que cada arista tenga un extremo en V_1 y otro en V_2 . A tales conjuntos se le llama **bipartición**.

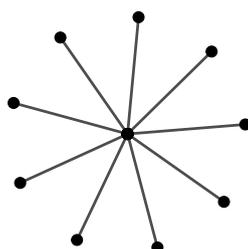
Un grafo es **bipartito semirregular** cuando todos los vértices en cada partición tienen el mismo grado.

Ejemplo 2.1.16

Un ejemplo de estos últimos grafos son los grafos bipartitos completos $K_{m,n}$, cuyos vértices pueden partirse en dos conjuntos V_1 y V_2 , tales que todos los vértices de V_1 son adyacentes a todos los vértices de V_2 .

En la figura se muestra el grafo bipartito completo $K_{1,9}$.

Los grafos $K_{1,n}$ también se conocen como estrella y se anotan S_n .

**2.2. Subgrafos****Definición 2.2.1**

Un **subgrafo** de un grafo X es un grafo Y tal que $V(Y) \subseteq V(X)$ y $E(Y) \subseteq E(X)$. Si $V(Y) = V(X)$ decimos que Y es un **subgrafo recubridor** de X .

Un subgrafo Y de X es un **subgrafo inducido** si dos vértices de $V(Y)$ son adyacentes si y sólo si son adyacentes en X .

Observación 2.2.2

1. Cualquier subgrafo recubridor de un grafo X se puede obtener borrando algunas de sus aristas.
2. El número de subgrafos recubridores de un grafo X es igual al número de subconjuntos de $E(X)$.
3. Cualquier subgrafo inducido de un grafo X se puede obtener borrando algunos de sus vértices junto con toda arista que contenga un vértice borrado.
4. El número de subgrafos inducidos de X es igual al número de subconjuntos de $V(X)$.

Algunos subgrafos conocidos son:

- **Clique:** Subgrafo que es completo.
- **Camino:** Un camino de longitud r de x a y en un grafo es una sucesión de $r+1$ vértices distintos, comenzando en x y terminando en y , tal que los vértices consecutivos son adyacentes. (Notación: P_{r+1})

Estos últimos subgrafos nos permiten dar la siguiente definición.

Definición 2.2.3

Decimos que un grafo X es **conexo** si existe un camino entre cualquier par de vértices de X . De lo contrario, X es **disconexo**.

Un subgrafo inducido de X que es maximal respecto a la conexión, se llama **componente conexa** de X , que abreviamos como *componente*.

Observación 2.2.4

Un grafo X es disconexo si se puede partir $V(X)$ en dos conjuntos no vacíos de vértices R y S tal que ningún vértice en R es adyacente a un vértice en S . En este caso, decimos que X es una **unión disjunta** de dos subgrafos inducidos por R y S .

Definición 2.2.5

La **distancia** $d_X(x, y)$ entre dos vértices x e y en un grafo X , es la longitud del camino más corto de x a y . Si el grafo es claro en el contexto, escribimos $d(x, y)$.

Definición 2.2.6

Un **ciclo** es un grafo conexo en donde cada vértice tiene exactamente dos vecinos. (Notación: C_n)

Un **ciclo en un grafo X** es un subgrafo de X que es un ciclo.

Un **grafo acíclico** es un grafo sin ciclos.

Observación 2.2.7

C_n es bipartito si y solo si n es par.

Supongamos n impar. Como C_n es bipartito, dos vértices consecutivos cualesquiera deben estar en uno de los distintos conjuntos de la bipartición. Si indexamos los vértices consecutivos del 1 al n y llamamos a los conjuntos de la partición V_1 y V_2 , entonces los vértices pares no son adyacentes entre sí, y pertenecerán a V_1 , entonces los impares deben pertenecer a V_2 , pero 1 y n pertenecerían a V_2 y son adyacentes. Lo cual es absurdo.

Indexando los vértices de la misma manera, con n par, es claro que podemos definir una bipartición de sus vértices en pares e impares, de forma que los pares solo son adyacentes a los impares y viceversa.

Lema 2.2.8

Si X' es un subgrafo de un grafo X bipartito, entonces X' también será bipartito.

Demostración.

Si X es bipartito entonces existe una bipartición de los vértices de X en V_1 y V_2 tal que los vértices de V_1 no son adyacentes a los de V_2 . Como X' es un subgrafo, sus vértices pertenecerán a V_1 o a V_2 , siendo también él bipartito. □

Proposición 2.2.9

Un grafo X es bipartito si y solo si no contiene ciclos impares.

Demostración.

(\Rightarrow)

Si X contiene ciclos de grado impar, tiene un subgrafo que no es bipartito, por la Observación 2.2.7. Del Lema 2.2.8, se desprende que X no es bipartito.

(\Leftarrow)

Podemos suponer que X es conexo, pues en caso contrario, basta probar que cada componente conexa es bipartita.

Consideremos un vértice y fijo y la siguiente partición en V :

$$V_1 = \{x \in V : d(x, y) = \hat{2}\}, \quad V_2 = \{x \in V : d(x, y) \neq \hat{2}\}$$

Como X es conexo, podemos asegurar que será una bipartición de V .

No puede existir una arista cuyos dos vértices pertenecen a V_1 , pues X contendría un ciclo impar. □

Algunos grafos y subgrafos con los que se trabaja a menudo son:

- **Árbol:** Grafo conexo acíclico.
- **Bosque:** Grafo acíclico, cuyas componentes son árboles.
- **Árbol recubridor:** Subgrafo recubridor sin ciclos.
- **Bosque recubridor maximal en X :** Subgrafo recubridor donde cada componente es árbol recubridor.

2.3. Matriz de adyacencia

Definición 2.3.1

Sea X un grafo, su matriz de adyacencia $A(X) = (a_{ij})$ es una matriz con filas y columnas indexadas por los vértices tal que $a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i \sim j \\ 0 & \text{si } i \not\sim j \end{cases}$.

Observación 2.3.2

Las matrices de adyacencia de grafos simples son simétricas.

Proposición 2.3.3

Sean X e Y grafos en el mismo conjunto de vértices. Entonces son isomorfos si y solo si hay una matriz de permutación P tal que $P^T A(X) P = A(Y)$.

Demostración.

Supongamos que X e Y son isomorfos.

Cada entrada ij de $A(X)$ que corresponde a la arista $x_i x_j$ del grafo X aparecerá como arista $\varphi(x_i) \varphi(x_j)$ en Y .

Por lo tanto, la matriz $A(Y)$ es una permutación de $A(X)$ y por lo tanto, existe P tal que $P^T \cdot A(X) \cdot P = A(Y)$.

Recíprocamente, si $A(Y)$ es una matriz de permutación de $A(X)$, existe una permutación (una función biyectiva) entre los vértices de X e Y tal que se conservan las adyacencias. Por lo tanto, X e Y son isomorfos. □

Observación 2.3.4

Como las matrices de permutación son ortogonales, $P^T = P^{-1}$. Entonces si X e Y son grafos isomorfos, $A(X)$ y $A(Y)$ son semejantes.

Corolario 2.3.5

Si indexamos de dos maneras distintas los vértices de un grafo, las matrices de adyacencia correspondientes serán semejantes.

Definición 2.3.6

El **polinomio característico** de una matriz A es el polinomio

$$\phi(A, x) = \det(xI - A)$$

Teniendo en cuenta el Corolario 2.3.5 podemos anotar el polinomio característico de $A(X)$ como $\phi(X, x)$.

El **espectro** de una matriz es el multiconjunto determinado por sus valores propios

junto con sus multiplicidades. El espectro de un grafo X es el espectro de $A(X)$. Para anotar el espectro de un grafo escribimos $Sp(X)$.

De la misma forma nos referimos a los **valores** y **vectores propios** de $A(X)$ como los de X .

Ejemplo 2.3.7

Veamos el cálculo del polinomio característico del camino P_3 .

$$\phi(P_3, x) = \begin{vmatrix} x & -1 & 0 \\ -1 & x & -1 \\ 0 & -1 & x \end{vmatrix} = x^3 - x - x = x^3 - 2x = x(x^2 - 2)$$

Por lo que el $Sp(P_3) = \{0, \sqrt{2}, -\sqrt{2}\}$.

Observación 2.3.8

Los polinomios característicos de los grafos P_n verifican la siguiente relación de recurrencia

$$\phi(P_n, x) = x\phi(P_{n-1}, x) - \phi(P_{n-2}, x)$$

la cual nos será muy útil más adelante.

Para probarla, solo hace falta escribir el determinante para el cálculo de $\phi(P_n, x)$:

$$\phi(P_n, x) = \begin{vmatrix} x & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & x \end{vmatrix}$$

Desarrollando por la primera fila, obtenemos

$$\phi(P_n, x) = x \begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & x \end{vmatrix} - (-1) \begin{vmatrix} -1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & x \end{vmatrix}$$

El primer determinante que aparece en el desarrollo es $\phi(P_{n-1}, x)$ y el segundo se

puede reescribir como

$$-1 \begin{vmatrix} x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & x \end{vmatrix} = -\phi(P_{n-2}, x)$$

Por lo tanto, llegamos a $\phi(P_n, x) = x\phi(P_{n-1}, x) - \phi(P_{n-2}, x)$

Definición 2.3.9

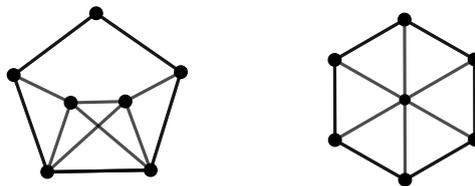
Dos grafos con el mismo espectro se llaman **coespectrales**.

Observación 2.3.10

Dos grafos isomorfos serán coespectrales, mientras que no todos los grafos coespectrales son isomorfos. Por ejemplo, si consideramos los grafos de la figura, que son claramente no isomorfos, tienen el mismo polinomio característico:

$$(x + 2)(x + 1)^2(x - 1)^2(x^2 - 2x - 6).$$

Por lo tanto, serán coespectrales.



Definición 2.3.11

Un **paseo** de longitud r en un grafo dirigido X es una sucesión de vértices $v_0 \sim v_1 \sim \dots \sim v_r$.

Un paseo es **cerrado** si su primer y último vértice son el mismo.

Observación 2.3.12

Esta definición es similar a la de camino, con la diferencia que en un paseo se permite trabajar con vértices repetidos en la sucesión.

Proposición 2.3.13

Sea X un grafo dirigido con matriz de adyacencia A . El número de paseos de longitud r de u a v en X es la entrada uv de A^r .

Demostración.

Demostraremos por inducción completa en r .

$r = 1$:

Los paseos de longitud 1 son las aristas. Por lo tanto, tendremos 1 paseo de u a v . Si existe este paseo, la entrada uv será 1, indicando la existencia de la arista.

Ahora, supongamos que el número de paseos de longitud r de u a v en X es la entrada uv de A^r . La entrada uv de A^{r+1} es el resultado de multiplicar la fila u de A^r por la columna v de la matriz A .

Las entradas de la fila u de A^r contienen el número de paseos de u al vértice que determine la entrada, mientras que las entradas de la columna v de la matriz A son las aristas que tienen de extremo al vértice v . En la multiplicación “sobreviven” las componentes que tienen un vértice en común. Es decir, a los paseos que aparecen en la fila u , le agrego una arista hasta v .

□

Corolario 2.3.14

Sea X un grafo con e aristas y t triángulos. Si A es la matriz de adyacencia de X , entonces se verifica:

1. $trA = 0$
2. $trA^2 = 2e$
3. $trA^3 = 6t$

Demostración.

1. Por la propiedad anterior, las entradas de la forma ii son la cantidad de aristas de un vértice a sí mismo. Como es un grafo simple (sin bucles), esa cantidad es cero.
Por lo tanto, todas las entradas de la diagonal de A son cero y su suma también lo será.
2. Las entradas ii de A^2 son el producto de la fila i con la columna i de la matriz A . Como A es simétrica, lo que hacemos en esta multiplicación es

contar cuántas aristas son incidentes al vértice i .

Si sumamos toda la diagonal, nos da el doble de aristas del grafo por estar contando cada arista dos veces (en la entrada ii y en la jj).

3. Con el mismo razonamiento de la demostración de la proposición anterior, cuando se multiplica la fila i de A^2 con la columna i de A , se están contando la cantidad de paseos de i a i de longitud 3. Es decir, los paseos cerrados de longitud 3: los triángulos. (Obsérvese que estamos trabajando con grafos sin bucles)

Entonces, se están contando la cantidad de triángulos con un vértice en i .

Si sumamos todas las entradas ii (trA^3) estamos contando tres veces los triángulos, uno por cada vértice. Además estamos contando dos veces cada arista (es decir, dos veces cada vértice). Por lo tanto, $trA^3 = 6t$.

□

Observación 2.3.15

Como la traza de A^r es igual a la suma de sus valores propios y los valores propios de A^r son la r -ésima potencia de los valores propios de A , entonces la traza de A^r se determina a partir del espectro de A .

Por lo tanto, el espectro de un grafo X determina, al menos, el número de vértices, aristas y triángulos en X .

2.4. Matrices simétricas

Teniendo en cuenta que las matrices de adyacencia de grafos simples son simétricas, En esta sección veremos algunas propiedades de gran ayuda para trabajar con el espectro y los vectores propios de grafos simples.

Proposición 2.4.1

Sea M una matriz simétrica real.

Si u y v son vectores propios de M con distintos valores propios (λ y φ , respectivamente), entonces u y v son ortogonales.

Demostración.

Por la simetría de M , se tiene $u^T Mv = (v^T Mu)^T \Rightarrow u^T Mv = (v^T \lambda u)^T = \lambda(u^T v)$

Por otro lado, $u^T Mv = \varphi(u^T v)$.

Entonces $\lambda(u^T v) = \varphi(u^T v)$.

Como $\lambda \neq \varphi$, $u^T v = 0$. Es decir, u y v son ortogonales.

□

Proposición 2.4.2

Los valores propios de una matriz simétrica real M son números reales.

Demostración.

$Mw = \delta w$ con $w \in \mathbb{C}$ vector propio asociado a δ para M .

$$\overline{(Mw)} = \overline{Mw} = M\bar{w} = \bar{\delta}\bar{w}.$$

Entonces \bar{w} es vector propio asociado a $\bar{\delta}$ para M .

Si $\delta \neq \bar{\delta} \Rightarrow w^T \bar{w} = 0$, lo cual es absurdo, pues $\|w\|^2 > 0$.

Por lo tanto, $\delta = \bar{\delta}$ y $\delta \in \mathbb{R}$. □

Definición 2.4.3

Si U es un subespacio de V , decimos que U es un **subespacio M -invariante** si $Mu \in U$ para todo $u \in U$.

Proposición 2.4.4

Sea M una matriz $n \times n$ simétrica real.

Si U es un subespacio M -invariante de \mathbb{R}^n , U^\perp también es M -invariante.

Demostración.

Sea $u \in U \Rightarrow Mu \in U \Rightarrow v^T(Mu) = 0$ con $v \in U^\perp$.

Ahora, $v^T(Mu) = (v^T M)u = (Mv)^T u \Rightarrow (Mv)^T u = 0$ para todo $u \in U$.

Entonces $Mv \perp u$ para todo $u \in U$ y para todo $v \in U^\perp$. Por lo tanto, $Mv \in U^\perp$ para todo $v \in U^\perp$.

Quedando probado, de esta manera, que U^\perp es M -invariante. □

Observación 2.4.5

Cualquier matriz cuadrada tiene al menos un valor propio, porque debe haber, al menos, una solución a la ecuación polinomial $\det(xI - M)$. Por lo tanto, una matriz simétrica real M tiene, al menos, un valor propio real, llamémosle θ , y entonces, al menos, un vector propio real (cualquier vector en el núcleo de $M - \theta I$).

Proposición 2.4.6

Sea M una matriz simétrica real $n \times n$.

Si U es un subespacio M -invariante de \mathbb{R}^n , distinto al nulo, entonces U contiene un vector propio real de M .

Demostración.

Sea R una matriz cuyas columnas forman una base ortonormal de U .

Como U es M -invariante, $MR = RB$ para alguna matriz cuadrada B .

Como $R^T R = I$, tenemos que $R^T M R = R^T R B = B$, entonces B es simétrica real. Toda matriz simétrica real tiene, al menos, un valor propio (real), elegimos un vector propio (real) u de B con valor propio λ .

Entonces $M R u = R B u = \lambda R u$

Como $u \neq 0$ y las columnas de R son LI, $R u \neq 0$. Por lo tanto, $R u$ es un vector propio de M , contenido en U . □

Teorema 2.4.7

Sea M una matriz simétrica real $n \times n$.

Entonces \mathbb{R}^n tiene una base ortonormal formada por vectores propios de M .

Demostración.

Sea $\{u_1, \dots, u_m\}$ un conjunto ortonormal de $m < n$ vectores propios de M y sea U el subespacio que estos vectores abarcan.

M tiene al menos un vector propio, por la Proposición 2.4.6, entonces $m \geq 1$.

Como el subespacio U es M -invariante, por la Proposición 2.4.4, U^\perp también es M -invariante.

Por Proposición 2.4.6, $U^\perp \neq \sigma$ contiene un vector propio de M , que al normalizarlo lo llamamos u_{m+1} .

Entonces $\{u_1, \dots, u_m, u_{m+1}\}$ es un conjunto ortonormal de $m + 1$ vectores propios de M .

Razonando inductivamente se llega a que un conjunto de un valor propio normalizado puede extenderse a una base ortonormal de vectores propios de M . □

Corolario 2.4.8

Si M es una matriz simétrica real de $n \times n$, entonces hay matrices L y D tales que $L^T L = L L^T = I$ y $L M L^T = D$, donde D es la matriz diagonal de valores propios de M .

2.5. Vectores propios

Cuando definimos matriz de adyacencia de un grafo X , dijimos que las filas y columnas de $A(X)$ son indexadas por los vértices de X . Formalmente, esto significa que estamos viendo a $A(X)$ como la transformación lineal sobre $\mathbb{R}^{V(X)}$, el espacio de las funciones sobre $V(X)$, más aún, sobre el espacio vectorial isomorfo a \mathbb{R}^n , donde $n = |V(X)|$. Si $f \in \mathbb{R}^{V(X)}$ y $A = A(X)$, la imagen Af de f bajo A está dada por

$$(Af)(u) = \sum a_{uv} f(v) \quad (1)$$

Como A es una matriz 01, podemos asegurar que $(Af)(u) = \sum_{v \sim u} f(v)$. Es decir, el valor de Af para u es la suma de los valores de f sobre los vecinos de u . Si suponemos que f es un vector propio de A con valor propio θ , entonces $Af = \theta f$ y entonces

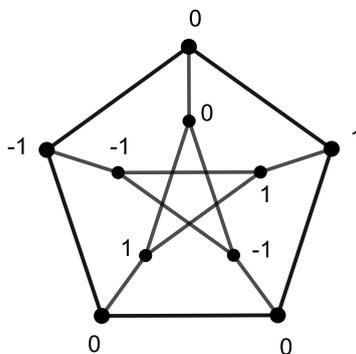
$$\theta f(u) = \sum_{v \sim u} f(v). \quad (2)$$

Es decir, la suma de los valores de f sobre los vecinos de u es igual a θ por el valor de f en u .

Recíprocamente, cualquier función f que satisface esta condición es un vector propio de X .

Ejemplo 2.5.1

La figura muestra un vector propio del grafo de Petersen. Se puede chequear que la suma de los valores sobre los vecinos de cualquier vértice es igual al valor sobre el vértice. Por lo tanto, tenemos un vector propio con valor propio 1.



Lema 2.5.2

Sea X un grafo k -regular, entonces k es valor propio de X con vector propio $\mathbf{1}$.

Demostración.

Si X es k -regular, en todas las filas de $A(X)$ hay k entradas que son 1 y el resto 0. Por lo tanto, $A(X)\mathbf{1} = k\mathbf{1}$, probando a nuestra tesis. □

Proposición 2.5.3

Sea X un grafo k -regular sobre n vértices con valores propios $k, \theta_2, \dots, \theta_n$. Entonces, X y su complemento \bar{X} tienen los mismos vectores propios y los valores propios de \bar{X} son $n - k - 1, -1 - \theta_2, \dots, -1 - \theta_n$.

Demostración.

La matriz de adyacencia de \bar{X} viene dada por

$$A(\bar{X}) = J - I - A(X) \quad (3)$$

con J la matriz cuyas entradas son todas 1.

Sea $\{\mathbf{1}, u_2, \dots, u_n\}$ una base ortonormal de vectores propios de $A(X)$.

Entonces $\mathbf{1}$ es un vector propio de \bar{X} con valor propio $n - k - 1$.

Para $2 \leq i \leq n$, el vector propio u_i es ortogonal a $\mathbf{1}$, y entonces

$$A(\bar{X})u_i = (J - I - A(X))u_i = Ju_i - u_i - A(X)u_i = (-1 - \theta_i)u_i$$

Por lo tanto, u_i es un vector propio de \bar{X} con valor propio $-1 - \theta_i$. □

2.6. Matrices semidefinidas positivas**Definición 2.6.1**

Una matriz simétrica real M es **semidefinida positiva** si $u^T M u \geq 0$ para todo vector u . Y es **definida positiva** si es semidefinida positiva y $u^T A u = 0$ si y solo si $u = 0$.

Observación 2.6.2

Una matriz semidefinida positiva es definida positiva si y solo si es invertible.

Veamos algunas caracterizaciones de matrices semidefinidas positivas:

1. *Relacionada con valores propios:*

Si u es un vector propio de M con valor propio θ , entonces $u^T A u = \theta u^T u$. Por lo tanto, una matriz simétrica real es semidefinida positiva si y sólo si sus valores propios son no negativos.

2. *Relacionada con la factorización:*

Si $M = B^T B$ para alguna matriz B , entonces:

$u^T M u = u^T B^T B u = (B u)^T B u \geq 0$. Por lo tanto, M es semidefinida positiva.

Proposición 2.6.3

Sea Y un subgrafo inducido de X . Entonces,

$$\theta_{\min(X)} \leq \theta_{\min(Y)} \leq \theta_{\max(Y)} \leq \theta_{\max(X)}.$$

Demostración.

Sea A la matriz de adyacencia de X y sea $\theta = \theta_{\max(X)}$.

La matriz $\theta I - A$ tiene solamente valores propios no negativos. Por lo tanto, $\theta I - A$ es semidefinida positiva.

Sea f cualquier vector que es cero sobre los vértices de X que no están en Y , y sea f_Y la restricción a $V(Y)$. Entonces, $0 \leq f^T(\theta I - A)f = f_Y^T(\theta I - A(Y))f_Y$.

Se deduce entonces que $\theta I - A(Y)$ es semidefinida positiva.

Por lo tanto, $\theta_{\max(Y)} \leq \theta$.

Análogamente se prueba que $\theta_{\min(X)} \leq \theta_{\min(Y)}$. □

2.7. Funciones subarmónicas**Definición 2.7.1**

Si M es una matriz cuadrada, decimos que un vector x no negativo es λ -**subarmónico** para M si $x \neq 0$ y $Mx \geq \lambda x$. Cuando el valor de λ es irrelevante, simplemente decimos que x es subarmónico.

Veamos una forma de originar vectores subarmónicos:

Sea $|M|$ la matriz que se obtiene reemplazando cada entrada de la matriz M por su valor absoluto.

Si x es un vector propio de M con valor propio θ , entonces

$$|\theta||x_i| = |\theta x_i| = |(Mx)_i| = \left| \sum_j M_{ij}x_j \right| \leq \sum_j |M_{ij}||x_j| = (|M||x|)_i \quad (4)$$

de donde se ve que $|x|$ es $|\theta|$ -subarmónico para $|M|$.

Definición 2.7.2

Sea A una matriz real $n \times n$.

El **grafo dirigido subyacente** de A tiene el conjunto de vértices $\{1, \dots, n\}$, con un arco desde el vértice i al vértice j si y solo si $A_{ij} \neq 0$.

Definición 2.7.3

Una matriz cuadrada es **irreducible** si su grafo subyacente es fuertemente conexo.

Proposición 2.7.4

Sea M una matriz irreducible no negativa $n \times n$.

Entonces, existe un número real máximo ρ tal que existe un vector ρ -subarmónico para M .

Más aún, cualquier vector ρ -subarmónico x es un vector propio de M con valor propio ρ , y todas las entradas de x son positivas.

Demostración.

Sea $F(x) = \min_{i:x_i \neq 0} \frac{(Mx)_i}{x_i}$ una función definida sobre el conjunto de vectores no negativos, y consideremos los valores de F sobre los vectores del conjunto $S = \{x : x \geq 0, 1^T x = 1\}$.

Por definición de F para cualquier vector no negativo se cumple $F(x)x_i \leq (Ax)_i$ para todo i , entonces $F(x)x \leq Ax$. Por lo tanto, todo vector no negativo x es $F(x)$ -subarmónico.

Lo que demostraremos es que existe algún vector $y \in S$ tal que F alcanza su máximo sobre y .

Como S es compacto, esto sería inmediato si F fuera continua en S , pero este no es el caso en la frontera de S . (Observar que si M tiene una única entrada 0, por ejemplo, m_{13} y $m_{11} < m_{33}$ se tiene que $\lim_{t \rightarrow 0} F(t, 0, 1-t, 0, \dots, 0) = m_{11}$ pero $F(0, 0, 1, 0, \dots, 0) = m_{33}$).

Como M es irreducible, por la Proposición 2.3.13, la matriz $(I + M)^{n-1}$ es positiva, pues al agregar bucles (las entradas de la diagonal) puedo encontrar un paseo de largo $n - 1$ entre cualquier par de vértices del grafo subyacente a $I + M$.

Entonces, el conjunto $T = (I + M)^{n-1}S$ contiene solo vectores positivos y F es continua en T . (Observar que aquí no tenemos el problema como en S , pues los vectores de T no tienen coordenadas cero). Como T es también compacto, F alcanza su máximo valor ρ en el punto $z \in T$.

Si consideramos $y = \frac{z}{1^T z}$, $y \in S$ se tiene $F(y) = F(z) = \rho$.

Más aún, para cualquier vector x , $\rho \geq F((I + M)^{n-1}(x)) \geq F(x)$. Entonces, para z no existe vector $x \in S$ con $F(x) > \rho$. Es decir, existe un número real máximo $\rho = F(z) = F(y)$ tal que existe un vector ρ -subarmónico para M (z o y).

Ahora probaremos que cualquier vector ρ -subarmónico es un vector propio de M , necesariamente con valor propio ρ .

Si x es ρ -subarmónico, se define $\sigma(x)$ como $\sigma(x) = \{i : (Mx)_i > \rho x_i\}$.

Claramente, x es un vector propio si y solo si $\sigma(x) = \emptyset$. Supongamos, por absurdo,

que $\sigma(x) \neq \emptyset$.

El **soporte** de un vector v es el conjunto de coordenadas distintas a cero de v y anotamos $\text{supp}(v)$.

Sea h un vector no negativo con soporte igual a $\sigma(x)$, y consideremos $y = x + \varepsilon h$. Entonces, tenemos

$$(My)_i - \rho y_i = (Mx)_i - \rho x_i + \varepsilon(Mh)_i - \varepsilon \rho h_i \quad (5)$$

- Si $i \in \sigma(x)$, $(Mx)_i > \rho x_i$, y entonces para todos los valores suficientemente pequeños de ε , el lado derecho de la ecuación 5 es positivo. Por lo tanto, $(My)_i > \rho y_i$.
- Si $i \notin \sigma(x)$, $(Mx)_i = \rho x_i$ y $h_i = 0$, entonces $(My)_i - \rho y_i = \varepsilon(Mh)_i$. Como $\varepsilon > 0$, el lado derecho es no negativo. Como M es irreducible, existe al menos un valor de i que no pertenezca a $\sigma(x)$ tal que $(Mh)_i > 0$ y entonces $\sigma(y) \supseteq \sigma(x)$.

Si $|\sigma(y)| = n$, y es ρ' -subarmónico, donde $\rho' > \rho$, y esto es una contradicción para nuestra elección de ρ .

De otra forma, y es ρ -subarmónico, pero $|\sigma(y)| > |\sigma(x)|$. □

Definición 2.7.5

El **radio espectral** $\rho(M)$ de una matriz M es el máximo módulo de sus valores propios.

Observación 2.7.6

El radio espectral de una matriz no es necesariamente uno de sus valores propios. por ejemplo, si $M = -I$, entonces $\rho(M) = 1$.

Proposición 2.7.7

Sean M una matriz irreducible no negativa $n \times n$ y ρ el mayor número real tal que M tiene un vector ρ -subarmónico.

Si N es una matriz $n \times n$ tal que $|N| \leq M$ y $Nx = \theta x$, entonces $|\theta| \leq \rho$.

Si $|\theta| = \rho$, entonces $|N| = M$ y $|x|$ es un vector propio de M con valor propio ρ .

Demostración.

Si $Nx = \theta x \Rightarrow |\theta||x| = |\theta x| = |Nx| \leq |N||x| \leq M|x|$. Entonces $|x|$ es $|\theta|$ -subarmónico de M , y entonces $|\theta| \leq \rho$.

Si $|\theta| = \rho$, por Proposición 2.7.4, $M|x| = |N||x| = \rho|x|$ y $|x|$ es positivo.

Como $M - |N| \geq 0$ y $(M - |N|)|x| = 0$, entonces $M = |N|$. □

Proposición 2.7.8

Sea M una matriz irreducible no negativa $n \times n$ con radio espectral ρ .

Entonces ρ es un valor propio simple de M , y si x es un vector con valor propio ρ , entonces todas las entradas de x son distintas a cero y tienen el mismo signo.

Demostración.

El ρ -espacio propio de M es 1-dimensional, pues de lo contrario, podríamos encontrar un vector ρ -subarmónico con alguna entrada cero, contradiciendo la Proposición 2.7.4.

Si x es un vector propio con valor ρ , entonces, por la proposición anterior, $|x|$ es un vector propio positivo con el mismo valor propio. Entonces $|x|$ es un múltiplo de x , lo que implica que todas las entradas sean del mismo signo.

Como la multiplicidad geométrica de ρ es 1, $K = \text{Ker}(M - \rho I)$ tiene dimensión 1 y el espacio columna C de $M - \rho I$ tiene dimensión $n - 1$.

Si C contiene a x , entonces podemos encontrar un vector y tal que $x = (M - \rho I)y$. Para cualquier k , tenemos $(M - \rho I)(y + kx) = x$, entonces tomando k lo suficientemente grande, podemos asumir que $y + kx = y'$ es positivo. Pero entonces y' es ρ -subarmónico y entonces es múltiplo de x , lo cual es imposible.

Por lo tanto, podemos concluir que $K \cap C = \{\sigma\}$ y que $\mathbb{R}^n = K \oplus C$

Como K y C son M -invariantes, el polinomio característico $\varphi(M, t)$ de M es el producto de $t - \rho$ y el polinomio característico de M restringido a C .

Como $x \notin C$, todos los vectores de M contenidos en C tienen valores propios distintos a ρ . Por lo tanto, ρ es una raíz simple de $\varphi(M, t)$ y, entonces, tiene multiplicidad algebraica igual a 1. □

A continuación, veremos una propiedad que cumplen matrices no negativas complejas.

Definición 2.7.9

Sea M una matriz irreducible $n \times n$ con mayor valor propio ρ y con exactamente h valores propios de módulo ρ . Llamamos **índice de imprimitividad** de M , o simplemente **índice** de M a h . Si $h = 1$, decimos que la matriz M es **primitiva**. De lo contrario, la llamamos **cíclica**.

Proposición 2.7.10

Sea M una matriz irreducible $n \times n$ con mayor valor propio ρ e índice h . Sean $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_h$ los valores propios de M de módulo ρ . Entonces $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_h$ son las distintas raíces de r^h .

Demostración.

Para esta prueba se aplicará la siguiente afirmación, cuya demostración puede encontrarse en [10, pág. 36]:

Si una matriz compleja C , $n \times n$, verifica $|C| \leq M$, con M irreducible con máximo valor propio r , entonces para cada valor propio de C , se cumple $|s| \leq r$.

La igualdad se verifica si, y solo si, $C = e^{i\varphi} D M D^{-1}$, donde $s = r e^{i\varphi}$ y $|D| = I_n$

Sea $\lambda_t = \rho e^{i\varphi_t}$, $t = 1, 2, \dots, h$. Como $|\lambda_t| = \rho$, aplicando la afirmación anterior, con $C = M$ y $s = \lambda_t$, tenemos que

$$M = e^{i\varphi_t} D_t M D_t^{-1}, t = 1, 2, \dots, h$$

Entonces M y $e^{i\varphi_t} M$ son semejantes. Como ρ es un valor propio simple de M , para cada t , $e^{i\varphi_t} \rho = \lambda_t$ es un valor propio simple de $e^{i\varphi_t} M$, y entonces de M .

Además

$$M = e^{i\varphi_t} D_t (e^{i\varphi_s} D_s M D_s^{-1}) D_t^{-1} = e^{i(\varphi_t + \varphi_s)} (D_t D_s) M (D_t D_s)^{-1}$$

Por lo tanto, M y $e^{i(\varphi_t + \varphi_s)} M$ son semejantes para cualquier par s y t . Podemos concluir que $\rho e^{i(\varphi_t + \varphi_s)}$ es un valor propio de M y entonces, $e^{i(\varphi_t + \varphi_s)}$ debe ser alguno de los números $e^{i\varphi_1}, e^{i\varphi_2}, \dots, e^{i\varphi_h}$. Luego, los h distintos números $e^{i(\varphi_t + \varphi_s)}$ son cerrados bajo la multiplicación, siendo así las h -ésimas raíces de la unidad. \square

2.8. Teorema de Perron-Frobenius

El Teorema de Perron-Frobenius es el resultado más importante sobre los valores y vectores propios de matrices no negativas.

Teorema 2.8.1

Sea A una matriz $n \times n$ real no negativa, cuyos grafos dirigidos subyacentes X son fuertemente conexos (es decir, A es una matriz irreducible). Entonces

1. $\rho(A)$ es un valor propio simple de A .
Si x es un vector propio para ρ , entonces las entradas de x son distintas a cero, y todas tienen el mismo signo.
2. Si A_1 es una matriz $n \times n$ real no negativa tal que $A - A_1$ es no negativa, entonces $\rho(A_1) \leq \rho(A)$.
La igualdad se cumple si y solo si $A_1 = A$.

3. Si θ es un valor propio de A y $|\theta| = \rho(A)$, entonces θ es una m -ésima raíz de $\rho(A)^m$ y $e^{\frac{2\pi ir}{m}} \cdot \rho(A)$ es un valor propio de A para todo r entero.

Demostración.

1. Proposición 2.7.8
2. Proposición 2.7.7
3. Proposición 2.7.10

□

Teorema 2.8.2

Sean A la matriz de adyacencia del grafo X y ρ su radio espectral. Las siguientes proposiciones son equivalentes.

1. X es bipartito.
2. El espectro de A es simétrico respecto al origen. Es decir, para cualquier θ , las multiplicidades de θ y $-\theta$ como valores propios de A son las mismas.
3. $-\rho$ es un valor propio de A .

Demostración.

(1 \Rightarrow 2)

Es claro que si X es bipartito, entonces existe un grafo isomorfo a X con matriz de adyacencia de la forma $\begin{bmatrix} 0 & B \\ B^T & 0 \end{bmatrix}$, para una adecuada matriz B de ceros y unos. Si el vector con particiones (x, y) es un vector propio de A con valor propio θ , entonces es fácil verificar que $(x, -y)$ es un vector propio de A con valor propio $-\theta$. Por lo tanto, θ y $-\theta$ son valores propios con la misma multiplicidad.

(2 \Rightarrow 3)

Por Perron-Frobenius¹ ρ es valor propio y por hipótesis, $-\rho$ es un valor propio de A .

(3 \Rightarrow 1)

Supongamos que A es la matriz de adyacencia de un grafo conexo X .

¹Podemos considerar que X es conexo. En caso contrario, se demuestra para cada componente y luego, se toma de todos los radios espectrales, el mayor, que será el radio espectral de A . Un grafo simple conexo puede pensarse como un grafo dirigido fuertemente conexo. Por lo tanto, podemos aplicar Perron Frobenius.

Sean z_0 y z_1 vectores propios de A con valores propios ρ y $-\rho$, respectivamente. Entonces son linealmente independientes y el espacio propio de A^2 con valor propio ρ^2 tiene, al menos, dimensión dos.

Pero ρ^2 es el radio espectral de A^2 . Como A^2 es no negativa, por parte 1. de Perron-Frobenius, el grafo subyacente de A^2 no será conexo.

Entonces, las entradas ij de A^2 serán cero si los vértices v_i y v_j del grafo subyacente de A^2 pertenecen a componentes distintas.

Esto se traduce al grafo X como que no hay caminos de largo dos entre los vértices de una componente y otra. Por lo tanto, los vértices de X correspondientes a la misma componente en el grafo subyacente de A^2 no serán adyacentes entre sí. Podemos así, tomar una bipartición de los vértices de X , que son los vértices correspondientes a las distintas componentes del grafo subyacente de A^2 , de forma que dos vértices de la misma partición no serán adyacentes.

Quedando así probado que X es bipartito. □

Observación 2.8.3

Hay dos aplicaciones comunes del Teorema Perron-Frobenius a grafos regulares conexos:

1. Si X es un grafo k -regular conexo, con matriz de adyacencia A , entonces el radio espectral de A es el grado k , con vector correspondiente $\mathbf{1}$. Esto implica que cada otro espacio propio de A es ortogonal a $\mathbf{1}$.
2. El grafo X es bipartito si y solo si, $-k$ es un valor propio de A .

2.9. Descomposición espectral

Consideremos una matriz A simétrica real $n \times n$.

Si θ es un valor propio de A , y E_θ la matriz que representa la proyección ortogonal sobre el subespacio propio de θ , que anotamos S_θ , entonces $E_\theta^2 = E_\theta$.

Como los subespacios propios de A distintos son ortogonales (por Proposición 2.4.1), si θ y τ son valores propios distintos de A , se tiene que $E_\theta E_\tau = 0$.

Como ya se vio en la Proposición 2.4.7, \mathbb{R}^n tiene una base ortonormal formada por vectores propios de A . Entonces

$$I = \sum_{\theta \in \text{valp}(A)} E_\theta$$

Llegando así a

$$A = \sum_{\theta \in \text{valp}(A)} \theta E_\theta$$

Esta última igualdad es conocida como la descomposición espectral de A .
En general, si p es un polinomio cualquiera,

$$p(A) = \sum_{\theta \in \text{val}p(A)} p(\theta)E_\theta$$

2.10. Entrelazado

Definición 2.10.1

Una **función racional** es una función que puede expresarse como el cociente $\frac{q}{r}$ de dos polinomios.

Observación 2.10.2

Cuando p es una función racional, se mantiene la igualdad

$$p(M) = \sum_{\theta \in \text{val}p(M)} p(\theta)E_\theta$$

con la única condición que p esté definida en cada valor propio de A . Entonces obtenemos

$$(xI - M)^{-1} = \sum_{\theta \in \text{val}p(M)} (x - \theta)^{-1}E_\theta. \quad (6)$$

Proposición 2.10.3

Sean M una matriz simétrica real $n \times n$ y N la matriz que se obtiene de borrar la i -ésima fila y columna de M . Entonces,

$$\frac{\phi(N, x)}{\phi(M, x)} = e_i^T (xI - M)^{-1} e_i$$

donde e_i es el vector i -ésimo de la base canónica.

Demostración.

Por la fórmula de la inversa de una matriz, tenemos: $((xI - M)^{-1})_{ii} = \frac{\det(xI - N)}{\det(xI - M)}$.

A su vez, $((xI - M)^{-1})_{ii} = e_i^T (xI - M)^{-1} e_i$.

□

Corolario 2.10.4

Para cualquier grafo X se cumple

$$\phi'(X, x) = \sum_{u \in V(X)} \phi(X \setminus u, x)$$

Demostración.

$$(xI - A)^{-1} = \sum_{\theta \in \text{valp}(A)} (x - \theta)^{-1} E_\theta \Rightarrow \text{tr}(xI - A)^{-1} = \sum_{\theta} \frac{\text{tr} E_\theta}{x - \theta}.$$

Por la demostración de la Proposición 2.10.3, sabemos que

$$\text{tr}(xI - A)^{-1} = \sum \frac{\phi(X \setminus u, x)}{\phi(X, x)}.$$

Si m_θ denota la multiplicidad de θ como raíz de $\phi(X, x)$, entonces con algunos cálculos se llega a

$$\frac{\phi'(X, x)}{\phi(X, x)} = \sum_{\theta} \frac{m_\theta}{x - \theta}$$

Como E_θ es una matriz simétrica y $E_\theta^2 = E_\theta$, sus valores propios son todos 0 y 1 y $\text{tr}(E_\theta)$ es igual a su rango.

Pero el rango de E_θ es la dimensión del espacio propio asociado a θ , y entonces $(\text{tr} E_\theta) = m_\theta$, cumpliéndose así la igualdad deseada. □

Definición 2.10.5

Si $f = \frac{p}{q}$ es una función racional, decimos que f es **propia** si el grado de p es menor que el de q .

Observación 2.10.6

Cualquier función racional propia tiene una expansión en fracciones parciales

$$\sum_{i=1}^r \frac{p_i(x)}{(x - \theta_i)^{m_i}},$$

con m_i un entero positivo, y $p_i(x)$ es un polinomio no nulo de grado menor a m_i .

Definición 2.10.7

Llamamos **polos** de f a los números θ_i . El entero m_i es el **orden** del polo θ_i . Un **polo simple** es un polo de orden 1.

Observación 2.10.8

Si la función racional f tiene orden del polo m , entonces el orden del polo en f^2 es, al menos $2m$.

Teorema 2.10.9

Sea M una matriz simétrica real $n \times n$ y b un vector de largo n . Se define $\psi(x)$ como la función racional $b^T(xI - M)^{-1}b$. Entonces todos los ceros y polos de ψ son simples, y ψ' es negativa en donde es definida. Si θ y τ son polos consecutivos de ψ , el intervalo cerrado $[\theta, \tau]$ contiene exactamente una raíz de ψ .

Demostración.

Por la igualdad 6, se tiene

$$b^T(xI - M)^{-1}b = \sum_{\theta \in \text{valp}(M)} \frac{b^T E_{\theta} b}{x - \theta}.$$

Entonces, todos los polos de ψ son simples.

Derivando ambos miembros de la última igualdad, obtenemos

$$\psi'(x) = - \sum_{\theta} \frac{b^T E_{\theta} b}{(x - \theta)^2} \Rightarrow \psi'(x) = -b^T(xI - M)^{-2}b.$$

Como $b^T(xI - M)^{-2}b$ es la longitud al cuadrado de $(xI - M)^{-1}b$, entonces $\psi'(x) < 0$ para cualquier x que no sea polo de ψ . Esto implica que cada raíz de ψ debe ser simple.

Sean θ y τ polos consecutivos de ψ .

Como estos polos son simples, ψ es estrictamente decreciente en el intervalo $[\theta, \tau]$ y es positiva para valores de x cercanos a θ , y negativos cuando x es cercano a τ .

Entonces, este intervalo contiene exactamente una raíz de ψ . □

Si M es una matriz simétrica real $n \times n$, anotaremos sus valores propios en orden decreciente como $\theta_1(M) \geq \theta_2(M) \geq \dots \geq \theta_n(M)$.

Definición 2.10.10

Si M es una matriz simétrica real $n \times n$ y N es una matriz simétrica real $m \times m$, donde $m \leq n$. Decimos que los valores propios de N **entrelazan** los valores propios de M si para $i = 1, \dots, m$ se verifica $\theta_{n-m+i}(M) \leq \theta_i(N) \leq \theta_i(M)$.

Observación 2.10.11

El entrelazado es transitivo.

Demostración.

Sean tres matrices $M_{n \times n}$, $N_{m \times m}$ y $P_{r \times r}$ con $r \leq m \leq n$ tales que los valores propios

de N entrelazan los de M y los de P a los de N .

Entonces, por definición se verifica:
$$\begin{cases} \theta_{n-m+i}(M) \leq \theta_i(N) \leq \theta_i(M) \text{ con } i = 1, \dots, m \\ \theta_{m-r+i}(N) \leq \theta_i(P) \leq \theta_i(N) \text{ con } i = 1, \dots, r \end{cases}$$

También se deduce de la definición que $\theta_{n-r+i}(M) \leq \theta_{m-r+i}(N) \leq \theta_{m-r+i}(M)$.

Por lo tanto, se tiene $\theta_{n-r+i}(M) \leq \theta_i(P) \leq \theta_i(M)$. □

Teorema 2.10.12

Sean M una matriz simétrica real $n \times n$ y N una submatriz principal de M de orden m . Entonces, para $i = 1, \dots, m$ se cumple $\theta_{n-m+i}(M) \leq \theta_i(N) \leq \theta_i(M)$.

Demostración.

Probemos el resultado por inducción sobre n .

Si $m = n$, no hay nada que probar.

Veamos para $m = n - 1$:

Por Proposición 2.10.3, para algún i se tiene

$$\frac{\phi(N, x)}{\phi(M, x)} = e_i^T (xI - A)^{-1} e_i = \psi$$

Por Teorema 2.10.9, ψ tiene polos y raíces simples.

Los polos de ψ son valores propios de M y las raíces de ψ son valores propios de N .

Para una matriz simétrica S y un real λ , sea $n(\lambda, S)$ el número de índices tal que $\theta_i(S) \geq \lambda$.

Veamos el comportamiento de $n(\lambda, M) - n(\lambda, N)$ al decrecer λ :

- Si λ es mayor al mayor valor propio de ψ , $n(\lambda, M) - n(\lambda, N) = 0$.
- Como cada polo es simple, el valor de $n(\lambda, M) - n(\lambda, N)$ aumenta uno cuando pasa por un polo de ψ .
Y por cada raíz (que también son simples) su valor decrece en uno.
Como hay exactamente una raíz entre cada par de polos (por Teorema 2.10.9) la diferencia alterna entre 0 y 1.
Por lo tanto, $\theta_{i+1}(M) \leq \theta_i(N) \leq \theta_i(M)$ para todo i .

Ahora supongamos que $m = n - 2$. Entonces N es una submatriz principal de una submatriz principal P de M con orden $(n - 1)$.

Por inducción tenemos

$$\theta_{i+1}(P) \leq \theta_i(N) \leq \theta_i(P)$$

Pero recién probamos que $\theta_{i+1}(M) \leq \theta_i(P) \leq \theta_i(M)$.
 Por lo tanto, por transitividad, los valores propios de N entrelazan los de M .
 Razonando inductivamente para $m < n - 2$ se llega al enunciado del teorema. \square

2.11. Particiones equitativas

Definición 2.11.1

Decimos que una partición π de $V(X)$ con clases C_1, \dots, C_r es **equitativa** si el número de vecinos en C_j de un vértice u en C_i es una constante b_{ij} , independiente de u .

Observación 2.11.2

Una definición equivalente es que el subgrafo de X inducido por cada clase es regular, y que las aristas entre dos clases distintas forman un grafo bipartito semirregular.

Definición 2.11.3

El grafo dirigido con las r clases de π como sus vértices y b_{ij} arcos desde la i -ésima a la j -ésima clase se llama el **cociente** de X sobre π , y se anota por X/π . Entonces, las entradas de la matriz de adyacencia del cociente está dada por $A(X/\pi)_{ij} = b_{ij}$.

Definición 2.11.4

Si π es una partición de V con r clases, se define su **matriz característica** P como la matriz $|V| \times r$ con los vectores característicos de las clases de π como sus columnas.

Observación 2.11.5

$P^T P$ es una matriz diagonal, donde $(P^T P)_{ii} = |C_i|$. Como las clases son no vacías, la matriz $P^T P$ es invertible.

Ejemplo 2.11.6

Si definimos la partición de los vértices del grafo de Petersen en exteriores e interiores, obtendremos una partición equitativa π_1 con matriz del cociente

$$A(X/\pi_1) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

y matriz característica

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Lema 2.11.7

Sea π una partición equitativa del grafo X , con matriz característica P , y $B = A(X/\pi)$. Entonces, $AP = PB$ y $B = (P^T P)^{-1} P^T AP$.

Demostración.

Veamos que para todos los vértices u y las clases C_j se tiene $(AP)_{uj} = (PB)_{uj}$.

La entrada uj de AP es el número de vecinos de u que caen en C_j . Ahora, sea i tal que $u \in C_i$, entonces esta entrada es b_{ij} .

Por otro lado, la entrada uj de PB es también b_{ij} , pues la única entrada distinta a cero en la fila u es 1 en la columna i . Entonces $AP = PB$.

De esta igualdad se deduce $P^T AP = P^T PB$, y como $P^T P$ es invertible, $B = (P^T P)^{-1} P^T AP$.

□

Lema 2.11.8

Sean X un grafo con matriz de adyacencia A y π una partición de $V(X)$ con matriz característica P . Entonces π es equitativa si y solo si el espacio columna de P es A -invariante.

Demostración.

Para probar este resultado, tomaremos del álgebra lineal la siguiente condición necesaria y suficiente:

El espacio columna de P es A -invariante sii existe una matriz B tal que $AP = PB$.

(\Rightarrow)

Si π es equitativa, por Lema 2.11.7, existe la matriz $B = A(X/\pi)$ tal que $AP = PB$.

(\Leftarrow)

Si existe una matriz B tal que $AP = PB$, entonces cada vértice en la clase C_i es adyacente a b_{ij} vértices en la clase C_j , y entonces, π es equitativa. □

Teorema 2.11.9

Si π es una partición equitativa de un grafo X , entonces el polinomio característico de $A(X/\pi)$ divide al polinomio característico de $A(X)$.

Demostración.

Sea P la matriz característica de π y sea $B = A(X/\pi)$.

Si X tiene n vértices, sea Q una matriz $n \times (n - |\pi|)$ cuyas columnas, junto con las de P , forman una base de \mathbb{R}^n .

Entonces, existen matrices C y D , tales que $AQ = PC + QD$. Llegando así a

$$A \begin{pmatrix} P & Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P & Q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B & C \\ \mathbf{0} & D \end{pmatrix}$$

Como $\begin{pmatrix} P & Q \end{pmatrix}$ es invertible, $\det(xI - B)$ divide a $\det(xI - A)$. □

Observación 2.11.10

También se puede obtener información acerca de los vectores propios de X a partir de los vectores propios del cociente X/π .

Supongamos que $AP = PB$ y que v es un vector propio de B con valor propio θ . Entonces $Pv \neq 0$ y $APv = PBv = \theta Pv$. Entonces Pv es un vector propio de A . Además, si el espacio columna de P es A -invariante, debe tener una base formada por vectores propios de A . Cada uno de estos es constante en cada clase de π y entonces tiene la forma Pv , donde $v \neq 0$. Si $APv = \theta Pv$, entonces $Bv = \theta v$.

Si el espacio columna de P es A -invariante, entonces también lo es su complemento ortogonal. De aquí se concluye que debemos dividir los vectores propios de A en dos clases:

1. Aquellos cuyas entradas son constantes en cada clase de π , que tienen la forma Pv para algún vector propio v de B .
2. Aquellos cuyas entradas suman cero en cada clase de π .

Definición 2.11.11

Un valor propio θ_i de un grafo X es un **valor propio principal** de X si el subespacio propio de θ_i no es ortogonal al vector $\mathbf{1}$.

Definición 2.11.12

Sea X un grafo cuyos valores propios distintos son $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m$. La **parte principal del espectro** de X es el subconjunto \mathcal{M} de $\{\theta_1, \dots, \theta_m\}$ que consiste en los valores propios principales de X , y definimos

$$M_X(x) = \prod_{\theta_i \in \mathcal{M}} (x - \theta_i)$$

Observación 2.11.13

1. Los grafos coespectrales no necesariamente tienen la misma parte principal del espectro. Por ejemplo, los grafos $K_{1,4}$ y $C_4 \dot{\cup} K_1$ (unión disjunta de los grafos C_4 y K_1) son coespectrales, pero -2 es valor propio principal del primero, pero no del segundo.
2. El radio espectral ρ de un grafo X siempre será un valor principal porque, por Perron Frobenius, el subespacio S_ρ contiene un vector cuyas entradas son todas positivas.
3. En un grafo k -regular, todos los subespacios propios distintos a S_k son ortogonales a $\mathbf{1}$. Se deduce que los grafos con exactamente un valor principal son los grafos regulares.

Lema 2.11.14

Sea $f(x) \in \mathbb{R}[x]$. Entonces, $f(A)\mathbf{1} = \mathbf{0}$ si y solo si $M_X(x)$ divide a $f(x)$.

Demostración.

Considerando la descomposición espectral de A , $E_{\theta_1} \oplus E_{\theta_2} \oplus \dots \oplus E_{\theta_m}$, tenemos

$$f(A)\mathbf{1} = f(\theta_1)P_1\mathbf{1} + f(\theta_2)P_2\mathbf{1} + \dots + f(\theta_m)P_m\mathbf{1}$$

con P_i la proyección ortogonal sobre S_{θ_i} .

Entonces el i -ésimo sumando es el vector nulo si $\theta_i \notin \mathcal{M}$.

Por lo tanto, $f(A)\mathbf{j} = \mathbf{0}$ si y solo si $f(\theta_i) = 0$ para cada $\theta_i \in \mathcal{M}$. □

Teorema 2.11.15

Sea π cualquier partición equitativa del grafo X . Entonces $M_X(x)$ divide al polinomio característico de $A(X/\pi)$.

Demostración.

Sea $B = A(X/\pi)$ con polinomio característico $f(x)$.

Como $AP = PB$, $f(A)P1_{|\pi|} = Pf(B)1_{|\pi|}$, donde $1_{|\pi|}$ es el vector de todos 1 en $\mathbb{R}^{|\pi|}$, mientras que $f(B) = 0$, por el Teorema de Cayley Hamilton. Entonces, $f(A)\mathbf{1} = \mathbf{0}$ y, aplicando el Lema 2.11.14, se llega a la tesis. \square

A partir del Teorema 2.11.15 y la Observación 2.11.13 se llega al siguiente resultado.

Corolario 2.11.16

Sea π cualquier partición equitativa del grafo X . Entonces el radio espectral de X es valor propio de $A(X/\pi)$.

2.12. Espectro de algunos grafos

Espectro de K_n Sabemos que K_n es regular de grado $n - 1$ y que su complemento es el vacío. Es fácil ver que todos los valores propios del vacío son 0. Por Propiedad 2.5.3 los valores de K_n distintos a $n - 1$ verifican: $-1 - \theta_i = 0$. Entonces todos los valores propios distintos a $n - 1$ son -1 . Entonces

$$Sp(K_n) = \left[(n - 1)^{(1)}, -1^{(n-1)} \right]$$

Espectro de $K_{1,n}$ Este grafo tiene dos particularidades: es bipartito y tiene como subgrafo inducido al grafo vacío de n vértices. Pues si eliminamos el vértice que es adyacente al resto, obtenemos un grafo de n vértices sin aristas. Entonces, los valores propios de $K_{1,n}$ y del grafo vacío se entrelazan. Por lo tanto, hay $n - 1$ valores propios de $K_{1,n}$ que son cero. Solo nos falta hallar su radio espectral, porque, al ser bipartito, el otro valor propio que no conocemos, es el opuesto al radio espectral. Para hallarlo, veamos que tenemos que encontrar un real ρ y un vector v tal que $A(K_{1,n})v = \rho v$. Es decir,

$$\begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ Y \end{pmatrix} = \rho \begin{pmatrix} x \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho x \\ \rho Y \end{pmatrix}$$

De esta igualdad, se puede deducir que $x = \rho y_i$ siendo y_i las entradas del vector Y . Por lo tanto, todas las entradas de Y son iguales (ya que $\rho \neq 0$), nombrémoslas y . Llegamos entonces a que $x = \rho y$.

Además, se tiene $ny = \rho x$.

Trabajando con estas dos igualdades, se llega a $\rho = \sqrt{n}$. Entonces

$$Sp(K_{1,n}) = \left[-\sqrt{n}^{(1)}, 0^{(n-1)}, \sqrt{n} \right]$$

Espectro de C_n En [5, págs. 32 y 33] se ve que para cualquier matriz circulante A el conjunto de sus vectores propios es $\mathcal{Y} = \{y_0, y_1, \dots, y_{n-1}\}$ donde $y_s = (1, \rho_s, \rho_s^2, \dots, \rho_s^{n-1})$ con $0 \leq s \leq n-1$, siendo $\rho_s = e^{\frac{2\pi s}{n}i}$ asociado a $\lambda_s = \sum_{k=0}^{n-1} c_k e^{\frac{2\pi k s}{n}i}$ y $A = (c_0, c_1, \dots, c_{n-1})$.

La matriz de adyacencia del ciclo es un caso particular de matriz circulante, donde todas sus entradas son cero, salvo las $c_{i,i-1}$ y $c_{i,i+1}$. Por lo tanto, $\lambda_s = \rho_s + \rho_s^{n-1}$, entonces

$$\lambda_s = \cos\left(\frac{2\pi s}{n}\right) + \cos\left(\frac{2\pi s(n-1)}{n}\right) = 2\cos\left(\frac{2\pi s}{n}\right)$$

. Observemos que para $\lambda_0 = 2$, verificando la

Espectro de P_n Consideremos el grafo C_{2n+2} . Si $y_s = (1, \rho_s, \rho_s^2, \dots, \rho_s^{2n+1})$ es un vector propio de C_{2n+2} , donde $\rho^{2n+2} = 1$, entonces los vectores y_s e y_t , con $\rho_t = \rho_s^{-1}$ tienen el mismo valor propio, $\lambda_s = \lambda_t = 2\cos\left(\frac{\pi j}{n+1}\right)$, y por lo tanto, también el vector $y_s - y_t$. Este último vector tiene dos coordenadas cero a una distancia de $n+1$ y, siempre que $\rho \neq \pm 1$, induce un vector propio de los dos caminos obtenidos de borrar los dos puntos donde es cero.

2.13. Energía de grafos

El concepto de Energía de un grafo fue introducido por Ivan Gutman en 1978 [6], aunque sus raíces derivadas de la química, se remontan a la década de 1940, relacionadas con el concepto de Energía total del π -electrón.

Definición 2.13.1

Sea X un grafo simple con n vértices y $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sus n valores propios, definimos la **energía** del grafo X como

$$\mathcal{E}(X) = \sum_{i=1}^n |\lambda_i|.$$

Ejemplo 2.13.2

- $Sp(K_n) = \left[(n-1)^{(1)}, -1^{(n-1)} \right]$, entonces $\mathcal{E}(K_n) = n-1 + n-1 = 2(n-1)$.
- $Sp(K_{1,n}) = \left[-\sqrt{n}^{(1)}, 0^{(n-1)}, \sqrt{n} \right]$, entonces $\mathcal{E}(K_{1,n}) = 2\sqrt{n}$.

- En [8] se puede encontrar que $\mathcal{E}(C_n) = \begin{cases} \frac{4\cos\frac{\pi}{n}}{\operatorname{sen}\frac{\pi}{n}} & \text{si } n \equiv 0 \pmod{4} \\ \frac{4}{\operatorname{sen}\frac{\pi}{n}} & \text{si } n \equiv 2 \pmod{4} \\ \frac{2}{\operatorname{sen}\frac{\pi}{2n}} & \text{si } n \equiv 1 \pmod{2} \end{cases}$
- También en [8] se puede encontrar que $\mathcal{E}(P_n) = \begin{cases} \frac{2}{\operatorname{sen}\frac{\pi}{2(n+1)}} - 2 & \text{si } n \equiv 0 \pmod{4} \\ \frac{2\cos\frac{\pi}{2(n+1)}}{\operatorname{sen}\frac{\pi}{2(n+1)}} - 2 & \text{si } n \equiv 1 \pmod{2} \end{cases}$

2.13.1. Algunas cotas para la energía de grafos

No siempre es posible calcular la energía de un grafo, por tal motivo es importante tener herramientas para acotar su valor. Veremos dos cotas superiores para la energía de grafos en las que, únicamente, participan el número de aristas y vértices. La primera se debe a McClelland [9] y la segunda a Koolen y Moulton [7].

Proposición 2.13.3

Para un grafo simple X con n vértices y m aristas, se tiene

$$\mathcal{E}(X) \leq \sqrt{2mn}$$

Además, la igualdad se cumple si, y solo si, X es el grafo vacío o es isomorfo al grafo $\frac{n}{2}K_2$.

Demostración.

Por la desigualdad de Cauchy-Schwarz y el Corolario 2.3.14, tenemos

$$\left(\sum_{i=1}^n |\lambda_i| \right)^2 \leq n \sum_{i=1}^n |\lambda_i|^2 = 2mn$$

Es claro entonces que se cumple la desigualdad de la tesis.

Veamos cómo se cumple la igualdad en los grafos descritos.

Si el grafo es vacío, todos sus valores propios son cero, y por lo tanto, su energía

también será cero, por lo que se verifica la igualdad.

$\mathcal{E}(K_2) = 2$ y $\mathcal{E}(\frac{n}{2}K_2) = n$. Ahora, $\frac{n}{2}K_2$ tiene $2 \cdot \frac{n}{2}$ vértices y $\frac{n}{2}$ aristas. Por lo tanto, la cota nos quedaría $\sqrt{2 \binom{\frac{n}{2}}{2} \frac{n}{2}} = n$.

Ahora, si la igualdad se verifica, tenemos que

$$\left(\sum_{i=1}^n |\lambda_i| \right)^2 = n \sum_{i=1}^n |\lambda_i|^2 = 2mn$$

Entonces, por Cauchy-Schwarz sabemos que $|\lambda_1| = |\lambda_2| = \dots = |\lambda_n|$. Entonces, o son todos cero o el grafo tendrá dos valores propios distintos y opuestos, con multiplicidad $\frac{n}{2}$. Por lo que será bipartito.

Además, podemos deducir fácilmente que $|\lambda_i| = \sqrt{\frac{2m}{n}}$ y entonces $\lambda_i^2 = \frac{2m}{n}$. Esto se traduce en que existe la misma cantidad de paseos de largo dos para todos los vértices del grafo, que al ser bipartito serán solo las aristas del mismo. Entonces, el grafo es regular. Llegando así a

$$|\lambda_1| = \sqrt{\frac{2m}{n}} = \frac{2m}{n} \Rightarrow \frac{2m}{n} = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}$$

El primer caso se descarta, por lo que estamos en presencia de un grafo bipartito regular de grado 1, con $\frac{n}{2}$ aristas. Por lo tanto, el grafo es $\frac{n}{2}K_2$. □

Proposición 2.13.4

Sea X un grafo simple con n vértices y m aristas.

Si $2m \geq n$, entonces

$$\mathcal{E}(X) \leq \frac{2m}{n} + \sqrt{(n-1) \left[2m - \left(\frac{2m}{n} \right)^2 \right]}. \quad (7)$$

Más aún, se cumple la igualdad si, y solo si, X consiste de $\frac{n}{2}$ copias de K_2 , $X \cong K_n$ o X es un grafo fuertemente regular, conexo y no completo con dos valores propios no triviales, ambos con valor absoluto $\sqrt{(2m - (2m/n)^2)/(n-1)}$.

Demostración.

Por la desigualdad de Cauchy-Schwarz, tenemos

$$\left(\sum_{i=2}^n |\lambda_i| \right)^2 \leq (n-1) \sum_{i=2}^n |\lambda_i|^2.$$

Por Corolario 2.3.14,

$$(n-1) \sum_{i=2}^n |\lambda_i|^2 = (n-1)(2m - \lambda_1^2)$$

Entonces

$$\mathcal{E}(X) \leq \lambda_1 + \sqrt{(n-1)(2m - \lambda_1^2)}$$

La función $F(x) = x + \sqrt{(n-1)(2m - x^2)}$ es decreciente en el intervalo $\left[\sqrt{\frac{2m}{n}}, \sqrt{2m} \right]$.

Como $2m \geq n$, podemos afirmar que $\sqrt{\frac{2m}{n}} \leq \frac{2m}{n}$.

Además, $\frac{2m}{n} \leq \lambda_1 \leq \sqrt{2m}$, entonces

$$\sqrt{\frac{2m}{n}} \leq \frac{2m}{n} \leq \lambda_1 \leq \sqrt{2m}$$

Por lo tanto, $F(\lambda_1) \leq F\left(\frac{2m}{n}\right)$, llegando entonces a

$$\mathcal{E}(X) \leq \frac{2m}{n} + \sqrt{(n-1) \left[2m - \left(\frac{2m}{n} \right)^2 \right]}$$

.

□

Observación 2.13.5

En este caso no se caracterizarán los grafos para los que se cumple la igualdad. Es bastante fácil ver que si X es isomorfo a K_n o consiste en $\frac{n}{2}$ copias de K_2 , la igualdad se cumple.

Para ver que también se cumple en el otro caso, nos detendremos en definir los grafos fuertemente regulares, mostrando dos ejemplos de grafos y en calcular la energía de los fuertemente regulares que alcanzan la cota.

Definición 2.13.6

Sea X un grafo k -regular de n vértices que no es completo ni vacío. Decimos que X es **fuertemente regular** con **parámetros** (n, k, a, c) si cada par de vértices adyacentes tienen a vecinos comunes y cada par de vértices distintos no adyacentes tienen c vecinos comunes.

Ejemplo 2.13.7

- Un ejemplo sencillo de este tipo de grafos es C_5 , pues es 2-regular, los vértices adyacentes no tienen vecinos en común y los no adyacentes tienen un vecino en común. Entonces es un grafo fuertemente regular de parámetros $(5, 2, 0, 1)$.
- Otro grafo conocido que es fuertemente regular es el grafo de Petersen, con parámetros $(10, 3, 0, 1)$

Observación 2.13.8

Calculemos la energía de un grafo fuertemente regular con dos valores propios no triviales y ambos con valor absoluto $\sqrt{(2m - (2m/n)^2)/(n-1)}$. Para esto, veamos cuáles son los parámetros de este grafo y qué condiciones deben cumplir sus vértices y aristas.

Los valores propios distintos a k de un grafo fuertemente regular con parámetros (n, k, a, c) son las raíces del polinomio $x^2 - (a-c)x - (k-c)$ y siempre tienen distinto signo (ver [4]). Por lo tanto, si tienen igual valor absoluto, son opuestos y $a = c$. Ya sabemos entonces que nuestros parámetros son (n, k, a, a) . Además, al ser un grafo regular, $k = \frac{2m}{n}$, entonces llegamos a los parámetros $(n, \frac{2m}{n}, a, a)$.

En [4] se puede encontrar la relación entre los parámetros: $k(k-a-1) = (n-k-1)c$, entonces

$$k^2 - ka - k = na - ka - a \Rightarrow k(k-1) = a(n-1) \Rightarrow a = \frac{k(k-1)}{n-1}$$

Por lo tanto, $a = \frac{\frac{2m}{n}(\frac{2m}{n} - 1)}{n-1}$.

De esta forma, los parámetros serían $\left[n, \frac{2m}{n}, \frac{\frac{2m}{n}(\frac{2m}{n} - 1)}{n-1}, \frac{\frac{2m}{n}(\frac{2m}{n} - 1)}{n-1} \right]$.

Como $k > c$, podemos afirmar que $n^2 > 2m$.

Además, se puede probar fácilmente que las multiplicidades de estos valores propios serán distintas (ver[4]) y luego, por [4, Lema 10.3.3] estos serán enteros y,

$\frac{2m - \left(\frac{2m}{n}\right)^2}{n-1}$, que podemos expresar también como $k\frac{n-k}{n-1}$, es un cuadrado perfecto.

Entonces,

$$\mathcal{E}(X) = \frac{2m}{n} + \sqrt{(n-1) \left[2m - \left(\frac{2m}{n}\right)^2 \right]}$$

Un ejemplo particular de este tipo de grafo es un fuertemente regular de parámetros $(16, 6, 2, 2)$, cuya energía será $\mathcal{E}(X) = 36$.

3. Espectro y energía de los grafos Jahangir

3.1. Grafos tipo rueda

Definición 3.1.1

Sea $n \geq 3$, el **grafo rueda** (que anotamos W_n) es el que se obtiene de agregar al ciclo C_n un vértice, que llamaremos **centro**, adyacente a todos los vértices de C_n .

Observación 3.1.2

Estos grafos son un caso particular del grafo que se obtiene de realizar la operación **join** entre K_1 y C_n , definida en [3, pág 7], como el grafo $Z = X \nabla Y$ con $V(Z) = V(X) \cup V(Y)$ y $E(Z) = E(X) \cup E(Y) \cup \{xy : x \in V(X), y \in V(Y)\}$. En este caso $W_n = K_1 \nabla C_n$.

En [3, pág 27] se puede ver el siguiente Teorema:

Si X es r_1 -regular con n_1 vértices, e Y es r_2 -regular con n_2 vértices, entonces el polinomio característico de $X \nabla Y$ es:

$$\phi(X \nabla Y, x) = \frac{\phi(X, x)\phi(Y, x)}{(x - r_1)(x - r_2)} [(x - r_1)(x - r_2) - n_1 n_2]$$

Entonces,

$$\phi(W_n, x) = \frac{\phi(K_1, x)\phi(C_n, x)}{x(x - 2)} [x(x - 2) - n]$$

Operando se obtiene

$$\phi(W_n, x) = \frac{\phi(C_n, x)}{(x - 2)} (x^2 - 2x - n)$$

Entonces, el espectro de W_n y, por lo tanto, su energía quedan determinados por el espectro de C_n y las raíces del polinomio $(x^2 - 2x - n)$:

$$Sp(W_n) = (Sp(C_n) - \{2\}) \cup \left\{ 1 + \sqrt{1 + n}, 1 - \sqrt{1 + n} \right\}$$

y como $\mathcal{E}(W_n) = \mathcal{E}(C_n) + 1 + \sqrt{1 + n} + |1 - \sqrt{1 + n}| - 2$, tenemos

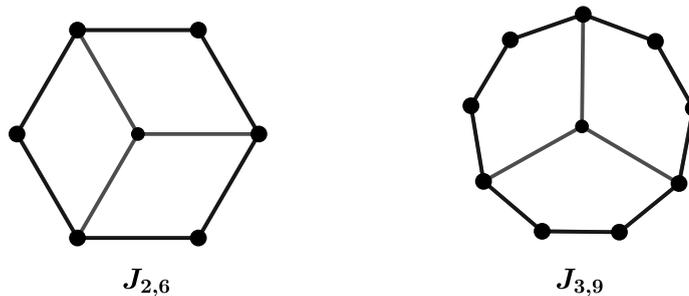
$$\mathcal{E}(W_n) = \begin{cases} \frac{4\cos\frac{\pi}{n}}{\operatorname{sen}\frac{\pi}{n}} + 2(\sqrt{1+n} - 1) & \text{si } n \equiv 0 \pmod{4} \\ \frac{4}{\operatorname{sen}\frac{\pi}{n}} + 2(\sqrt{1+n} - 1) & \text{si } n \equiv 2 \pmod{4} \\ \frac{2}{\operatorname{sen}\frac{\pi}{2n}} + 2(\sqrt{1+n} - 1) & \text{si } n \equiv 1 \pmod{2} \end{cases}$$

Definición 3.1.3

Sea m entero positivo y n entero positivo mayor que 2 y múltiplo de m , el grafo **Jahangir** (que anotamos $J_{m,n}$) se obtiene de agregar al ciclo C_n un nuevo vértice, que llamaremos **centro**, el cual es adyacente a $\frac{n}{m}$ vértices del ciclo, de tal manera que solo uno de m vértices consecutivos en el ciclo sea adyacente al nuevo vértice.

Ejemplo 3.1.4

Las siguientes figuras muestran a los grafos $J_{2,6}$ y $J_{3,9}$



Como se puede observar, la cantidad de aristas del primero es $6+3=9$ y del segundo $9+3=12$.

También se puede ver que $J_{2,6}$ es bipartito, mientras que $J_{3,9}$ no.

3.2. Cálculo de trazas de algunas potencias de $J_{n,m}$

Además de acercarnos a una idea de qué comportamiento tienen estos grafos, el cálculo de las trazas nos ayudará luego para demostrar algunas propiedades de sus valores propios.

Este cálculo se hace considerando siempre los $J_{m,n}$ que no son W_n .

De aquí en más, los resultados que no son nuevos se aclaran indicando la bibliografía de referencia.

3.2.1. Trazas de $J_{m,n}^2$ y $J_{m,n}^3$

Ya sabemos, por Corolario 2.3.14, que la traza de la matriz de adyacencia al cuadrado es el doble de la cantidad de aristas que tiene el grafo. Por lo tanto, $tr(J_{m,n}^2) = 2\left(n + \frac{n}{m}\right)$.

Como no existen los triángulos en los grafos Jahangir, $tr(J_{m,n}^3) = 0$.

3.2.2. Traza de $J_{m,n}^4$

Para calcular esta traza, contaremos los paseos cerrados de largo 4 en cada vértice. Para $m \geq 3$ tenemos cuatro distintos tipos de vértice:

1. el centro
2. $\frac{n}{m}$ vértices adyacentes al centro.
3. $\frac{2n}{m}$ vértices adyacentes a los vértices en 2.
4. $n - \frac{3n}{m}$ vértices en C_n que no son del tipo 2 ni 3.

Veamos cuántos paseos cerrados de largo 4 se tienen por cada tipo de vértice:

1. Desde el centro se tienen tres tipos:
 - a. aristas (yendo y viniendo dos veces): $\frac{n}{m}$
 - b. ochos (paseos formados por dos aristas adyacentes al centro):

$$2\binom{\frac{n}{m}}{2} = \frac{n}{m} \left(\frac{n}{m} - 1\right)$$

c. paseos que contienen un vértice del tipo 3: $\frac{2n}{m}$

Total de paseos cerrados de largo cuatro desde el centro:

$$\frac{n}{m} + \frac{2n}{m} + \frac{n}{m} \left(\frac{n}{m} - 1 \right)$$

2. Desde cada vértice adyacente al centro se tienen cuatro tipos:

a) aristas: 3

b) ochos: 6

c) paseos que contienen vértices del tipo 3: 2

d) paseos que contienen dos vértices del tipo 2: $\frac{n}{m} - 1$

Total de paseos cerrados de largo cuatro desde los vértices adyacentes al centro:

$$\frac{n}{m} \left(\frac{n}{m} + 10 \right)$$

3. Desde cada vértice del tipo 3:

a) aristas: 2

b) ochos: 2

c) los demás paseos: 3

Total de paseos cerrados de largo cuatro desde los vértices del tipo 3:

$$\frac{14n}{m}$$

4. Desde cada vértice del tipo 4:

a) aristas: 2

b) ochos: 2

c) los demás paseos: 2

Total de paseos cerrados de largo cuatro desde los vértices del tipo 4:

$$6 \left(n - \frac{3n}{m} \right)$$

Por lo tanto, $tr(J_{m,n}^4) = \frac{2n}{m} \left(\frac{n}{m} + 3m + 4 \right)$ para $m \geq 3$ (el caso $m = 2$ no nos interesará).

3.3. Valores propios de $J_{m,n}$ heredados de C_n

Lema 3.3.1

El grafo $J_{m,n}$ es bipartito si y solo si m es par.

Demostración.

$J_{m,n}$ es bipartito si y solo si no contiene ciclos impares. Lo cual es necesario y suficiente para que m sea par. Ya que el largo de los ciclos de $J_{m,n}$ es $km + 2$, con $k = 1, 2, \dots, \frac{n}{m}$. □

Para cualquier matriz circulante A , en particular $A(C_n)$, el conjunto de sus vectores propios es $\mathcal{Y} = \{y_0, y_1, \dots, y_{n-1}\}$ donde $y_s = (1, \rho_s, \rho_s^2, \dots, \rho_s^{n-1})$ con $0 \leq s \leq n-1$, siendo $\rho_s = e^{\frac{2\pi s i}{n}}$ asociado a $\lambda_s = \sum_{k=0}^{n-1} c_k e^{\frac{2\pi k s i}{n}}$ y $A = (c_0, c_1, \dots, c_{n-1})$.

Lema 3.3.2

Sea $y_s \in \mathcal{Y}$. Se cumple,

$$\sum_{\substack{j \equiv 0 \pmod{m} \\ 0 \leq j \leq n}} \rho_s^j = \begin{cases} \frac{n}{m} & \text{si } s \text{ es múltiplo de } \frac{n}{m} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Demostración.

$$\sum_{\substack{j \equiv 0 \pmod{m} \\ 0 \leq j \leq n}} \rho_s^j = \sum_{k=0}^{\frac{n}{m}-1} \rho_s^{mk} = \sum_{k=0}^{\frac{n}{m}-1} (\rho_s^m)^k = 1 + \rho_s^m + \dots + (\rho_s^m)^{\frac{n}{m}-1} = \frac{\rho_s^{m \frac{n}{m}} - 1}{\rho_s^m - 1}$$

Entonces,

$$\sum_{\substack{j \equiv 0 \pmod{m} \\ 0 \leq j \leq n}} \rho_s^j = \frac{\rho_s^n - 1}{\rho_s^m - 1}.$$

Ahora, esto último es igual a cero si $\rho_s^m \neq 1$.

Además,

$$\rho_s^m = 1 \Leftrightarrow \left(e^{\frac{2\pi s i}{n}}\right)^m = 1 \Leftrightarrow e^{\frac{2\pi s m i}{n}} = 1 \Leftrightarrow s = a \cdot \frac{n}{m}.$$

□

Observación 3.3.3

C_n es un subgrafo inducido de $J_{m,n}$ que se obtiene al eliminar el centro. Por lo tanto, la matriz $A(C_n)$ es una submatriz principal de $A(J_{m,n})$.

Es decir, $A(J_{m,n}) = \begin{pmatrix} A(C_n) & r \\ r^T & 0 \end{pmatrix}$, siendo r la columna correspondiente al centro.

Proposición 3.3.4

Si $0 < s \leq n - 1$ es un entero no múltiplo de $\frac{n}{m}$, entonces $x_s = \begin{pmatrix} y_s \\ 0 \end{pmatrix}$ es un vector propio de $J_{m,n}$ asociado a λ_s .

Demostración.

$$A(J_{m,n})x_s = \begin{pmatrix} A(C_n) & r \\ r^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_s \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A(C_n)y_s \\ \sum_{\substack{j \equiv 0 \pmod{m} \\ 0 \leq j \leq n}} \rho_s^j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_s y_s \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda_s \begin{pmatrix} y_s \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda_s x_s.$$

□

Observación 3.3.5

A partir de la proposición anterior, podemos asegurar que $J_{m,n}$ y C_n tienen, al menos, $n - m$ valores propios en común.

Corolario 3.3.6

Sea θ el radio espectral de $J_{2,n}$. Entonces $Sp(J_{2,n}) = Sp(C_n) - \{2, -2\} \cup \{\theta, 0, -\theta\}$.

Demostración.

$J_{2,n}$ tiene $n + 1$ valores propios, que es una cantidad impar.

Su espectro será simétrico respecto al cero por ser bipartito (por Teorema 2.8.2). El de C_n también.

Además, por Observación 3.3.5, comparten $n - 2$ valores propios con C_n . Entonces, hay tres valores que, en principio, no comparten. Uno será el cero. Los otros dos son simétricos y deberán ser el radio espectral y su opuesto, que por Perron Frobenius, son distintos al radio espectral de C_n .

□

Dejaremos para más adelante el cálculo de este radio espectral. Ahora veamos que no hay más vectores propios que $J_{m,n}$ herede de C_n , aparte de los vistos en la Proposición 3.3.4.

Proposición 3.3.7

Si $a \neq 0$, $\begin{pmatrix} y_s \\ a \end{pmatrix}$ no es vector propio de $J_{m,n}$.

Demostración.

Supongamos que $\begin{pmatrix} y_s \\ a \end{pmatrix}$ es vector propio de $J_{m,n}$ asociado a μ . Entonces

$$(J_{m,n}) \begin{pmatrix} y_s \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A(C_n) & r \\ r^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_s \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A(C_n)y_s + ar \\ \sum_{\substack{j \equiv 0 \pmod{m} \\ 0 \leq j \leq n}} \rho_s^j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_s y_s + ar \\ \sum_{\substack{j \equiv 0 \pmod{m} \\ 0 \leq j \leq n}} \rho_s^j \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} y_s \\ a \end{pmatrix}.$$

De la última igualdad tenemos

$$\lambda_s y_s + a = \mu \cdot y_s \Rightarrow ar = (\mu - \lambda_s) y_s$$

Como las primeras coordenadas de r y de y_s son 1, se sigue

$$a = \mu - \lambda_s \neq 0 \Rightarrow \mu \neq \lambda_s$$

Pero para que las segundas coordenadas sean iguales, se tiene que cumplir

$$\mu - \lambda_s = 0$$

pues la segunda coordenada de r es cero, pero la segunda coordenada de y_s no.

De esta forma llegamos a una contradicción. □

Ya vimos, en la sección 2.12, que los valores propios de C_n son $\lambda_s = 2\cos\left(\frac{2\pi s}{n}\right)$ con $s = 0, \dots, n-1$. Entonces, los que hereda $J_{m,n}$ son los de esta forma con $s \neq \frac{n}{m}$. Para $m = 2$ ya se vio que los otros valores propios de $J_{m,n}$ no se heredan de C_n .

Veamos qué sucede para $m > 2$.

Los que, en principio, no podemos afirmar que hereda son los valores propios de la forma $\lambda_a = 2\cos\left(\frac{2\pi a}{m}\right)$, con $a = 0, \dots, m-1$. Es decir, los valores propios de C_m .

Proposición 3.3.8

$J_{m,n}$ hereda los valores propios de C_m distintos de 2 (y de -2 en el caso m par), al menos con multiplicidad 1.

Demostración.

Como ya vimos, los valores propios de C_m también son valores propios de C_n , cuyos vectores propios asociados no son heredados por $J_{m,n}$.

Como $A(C_n)$ es una submatriz principal de $A(J_{m,n})$, los valores propios de una se entrelazan con las de la otra, es decir:

$$A(J_{m,n}) = \begin{pmatrix} A(C_n) & r \\ r^T & 0 \end{pmatrix}$$

$$\theta_0 > 2 \geq \theta_1 \geq \lambda_1 \geq \theta_2 \geq \dots \geq \lambda_i \geq \theta_{i+1} \geq \lambda_{i+1} \geq \dots \geq \theta_n$$

con $\theta_i (i = 0, \dots, n)$ valores propios de $A(J_{m,n})$ y $\lambda_i (i = 1, \dots, n-1)$ valores propios de $A(C_n)$.

Ahora, todos los valores propios de C_n , excepto 2 (y -2 en el caso n par) tienen multiplicidad 2. Entonces, por ejemplo $\lambda_i = \theta_{i+1} = \lambda_{i+1}$.

Por lo tanto, los valores propios de C_n con multiplicidad 2, que en principio no podíamos afirmar que fueran valores propios de $J_{m,n}$ (que son los valores propios de C_m) lo serán. Pero no podemos afirmar que tengan multiplicidad 2. □

Corolario 3.3.9

La cantidad de valores propios que $J_{m,n}$ hereda de C_m es $\frac{m-2}{2}$ si m es par y $\frac{m-1}{2}$ si m es impar.

Demostración.

Si m es par, los valores con multiplicidad 1 de C_m son 2 y -2. El resto tiene multiplicidad 2 y son los que $J_{m,n}$ hereda, por la Proposición 3.3.8. Por lo tanto, hereda la mitad de los restantes valores propios. Es decir, $\frac{m-2}{2}$.

Razonando análogamente para el caso impar, se llega a que $J_{m,n}$ hereda la mitad de los restantes valores propios de C_m . □

Lema 3.3.10

Sean $\{\lambda_a\}_a$ los valores propios distintos que $J_{m,n}$ hereda de C_m . Entonces si m es par, $\sum \lambda_a = 0$ y si m es impar, $\sum \lambda_a = -1$.

Demostración.

Si m es par:

$$\text{tr}(C_m) = 2 - 2 + 2 \sum \lambda_a = 0 \Rightarrow 2 \sum \lambda_a = 0 \Rightarrow \sum \lambda_a = 0$$

Si m es impar:

$$\text{tr}(C_m) = 2 + 2 \sum \lambda_a = 0 \Rightarrow 2 \sum \lambda_a = -2 \Rightarrow \sum \lambda_a = -1$$

□

Lema 3.3.11

Sean $\{\lambda_s\}_s$ los valores propios que $J_{m,n}$ hereda de C_n pero no son valores propios de C_m . Entonces $\sum \lambda_s = 0$.

Demostración.

$$\text{tr}(C_n) = \sum \lambda_s + \text{tr}(C_m) \Rightarrow 0 = \sum \lambda_s + 0 \Rightarrow \sum \lambda_s = 0$$

□

3.4. Propiedades de los restantes valores propios de $J_{m,n}$

En la sección 3.3 se mostró que $J_{m,n}$ hereda con multiplicidad 2, $n-m$ valores propios de C_n (que no son valores propios de C_m). Además se vio que de los valores propios de C_m también se heredan, salvo 2 (y -2 en el caso m par), pero no necesariamente con multiplicidad 2.

A los primeros los nombramos λ_s con s un número entre 1 y $n-1$ que no es múltiplo de $\frac{n}{m}$, mientras que a los valores propios distintos que $J_{m,n}$ hereda de C_m los nombramos λ_a . A los valores propios de $J_{m,n}$ que nos falta conocer los nombraremos μ_i , con $i = 1, \dots, \frac{m}{2} + 2$ si m es par e $i = 1, \dots, \frac{m+3}{2}$ si m es impar.

Proposición 3.4.1

Sean μ_i los valores propios de $J_{m,n}$ que nos falta conocer.

Si m es par,

$$\sum_{i=1}^{\frac{m}{2}+2} \mu_i = 0$$

Si m es impar,

$$\sum_{i=1}^{\frac{m+3}{2}} \mu_i = 1$$

Demostración.

Si m es par, se tiene

$$\text{tr}(J_{m,n}) = \sum \lambda_s + \sum \lambda_a + \sum_{i=1}^{\frac{m}{2}+2} \mu_i \Rightarrow \sum_{i=1}^{\frac{m}{2}+2} \mu_i = 0$$

Si m es impar, tenemos

$$\text{tr}(J_{m,n}) = \sum \lambda_s + \sum \lambda_a + \sum_{i=1}^{\frac{m+3}{2}} \mu_i \Rightarrow \sum_{i=1}^{\frac{m+3}{2}} \mu_i - 1 = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{\frac{m+3}{2}} \mu_i = 1$$

□

Proposición 3.4.2

Sean μ_i los valores propios de $J_{m,n}$ que nos falta conocer.

Si m es par y $m \geq 4$,

$$\sum_{i=1}^{\frac{m}{2}+2} \mu_i^2 = \frac{2n}{m} + m + 4$$

Si m es impar y $m \geq 3$,

$$\sum_{i=1}^{\frac{m+3}{2}} \mu_i^2 = \frac{2n}{m} + m + 2$$

Demostración.

Para esta demostración utilizaremos $\text{tr}(J_{m,n}^2)$ calculada en la subsección 3.2.1.

Si m es par:

$$\begin{aligned} \text{tr}(J_{m,n}^2) &= \sum \lambda_s^2 + \sum \lambda_a^2 + \sum_{i=1}^{\frac{m}{2}+2} \mu_i^2 \Rightarrow 2 \left(\frac{n}{m} + n \right) = 2n - 2m + \frac{2m-8}{2} + \sum_{i=1}^{\frac{m}{2}+2} \mu_i^2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{2n}{m} = -m - 4 + \sum_{i=1}^{\frac{m}{2}+2} \mu_i^2 \Rightarrow \frac{2n}{m} + m + 4 = \sum_{i=1}^{\frac{m}{2}+2} \mu_i^2 \end{aligned}$$

Si m es impar:

$$\begin{aligned} \text{tr}(J_{m,n}^2) &= \sum \lambda_s^2 + \sum \lambda_a^2 + \sum_{i=1}^{\frac{m+3}{2}} \mu_i^2 \Rightarrow 2 \left(\frac{n}{m} + n \right) = 2n - 2m + \frac{2m-4}{2} + \sum_{i=1}^{\frac{m+3}{2}} \mu_i^2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{2n}{m} = -m - 2 + \sum_{i=1}^{\frac{m+3}{2}} \mu_i^2 \Rightarrow \frac{2n}{m} + m + 2 = \sum_{i=1}^{\frac{m+3}{2}} \mu_i^2 \end{aligned}$$

□

Proposición 3.4.3

Sean μ_i los valores propios de $J_{m,n}$ que nos falta conocer.

Si m es par y $m \geq 6$,

$$\sum_{i=1}^{\frac{m}{2}+2} \mu_i^4 = \frac{2n}{m} \left(\frac{n}{m} + 4 \right) + 3m + 16$$

Si m es impar y $m \geq 3$,

$$\sum_{i=1}^{\frac{m+3}{2}} \mu_i^4 = \frac{2n}{m} \left(\frac{n}{m} + 4 \right) + 3m + 8$$

Demostración.

Para esta demostración utilizaremos la traza calculada en la subsección 3.2.2.

Si m es par:

$$\begin{aligned} \text{tr}(J_{m,n}^4) &= \sum \lambda_s^4 + \sum \lambda_a^4 + \sum_{i=1}^{\frac{m}{2}+2} \mu_i^4 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{2n}{m} \left(\frac{n}{m} + 3m + 4 \right) = 6n - 6m + \frac{6m - 32}{2} + \sum_{i=1}^{\frac{m}{2}+2} \mu_i^4 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{2n^2}{m^2} + 6n + \frac{8n}{m} = 6n - 6m + 3m - 16 + \sum_{i=1}^{\frac{m}{2}+2} \mu_i^4 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{2n^2}{m^2} + \frac{8n}{m} + 3m + 16 = \sum_{i=1}^{\frac{m}{2}+2} \mu_i^4 \Rightarrow \sum_{i=1}^{\frac{m}{2}+2} \mu_i^4 = \frac{2n}{m} \left(\frac{n}{m} + 4 \right) + 3m + 16 \end{aligned}$$

Si m es impar:

$$\begin{aligned} \text{tr}(J_{m,n}^4) &= \sum \lambda_s^4 + \sum \lambda_a^4 + \sum_{i=1}^{\frac{m+3}{2}} \mu_i^4 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{2n}{m} \left(\frac{n}{m} + 3m + 4 \right) = 6n - 6m + \frac{6m - 16}{2} + \sum_{i=1}^{\frac{m+3}{2}} \mu_i^4 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{2n^2}{m^2} + 6n + \frac{8n}{m} = 6n - 6m + 3m - 8 + \sum_{i=1}^{\frac{m+3}{2}} \mu_i^4 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{2n^2}{m^2} + \frac{8n}{m} + 3m + 8 = \sum_{i=1}^{\frac{m+3}{2}} \mu_i^4 \Rightarrow \sum_{i=1}^{\frac{m+3}{2}} \mu_i^4 = \frac{2n}{m} \left(\frac{n}{m} + 4 \right) + 3m + 8$$

□

Observación 3.4.4

$tr(C_4^4)$ no verifica la fórmula como el resto de los ciclos. Esto es porque los caminos cerrados de largo 4 en un ciclo son más: a los que se tienen en general, hay que sumarle dos más por vértice. Entonces $tr(C_4^4) = 32$.

Trabajando de forma análoga a la de la Proposición 3.4.3, teniendo esto en cuenta, llegamos a que la suma de las cuartas potencias de los valores propios restantes de $J_{4,n}$ es

$$\sum_{i=1}^4 \mu_i^4 = \frac{2n}{4} \left(\frac{n}{4} + 4 \right) + 32 = \frac{n}{2} \left(\frac{n}{4} + 4 \right) + 32$$

3.5. Particiones equitativas de $J_{m,n}$

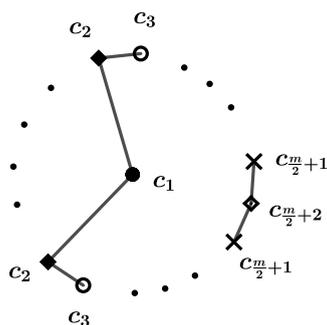
A continuación definiremos un tipo de partición equitativa π , de los grafos $J_{m,n}$. Con la que podremos ayudarnos para encontrar, en principio, su radio espectral, por Observación 2.11.13.

Se plantea la conjetura de que los valores propios de $J_{m,n}$ que nos resta conocer son las raíces del polinomio característico $A(J_{m,n}/\pi)$

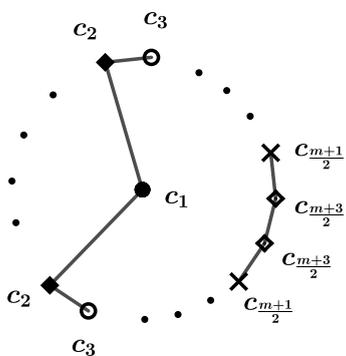
Para definir la partición, indexemos el centro con 1 y los vértices del ciclo de 2 a $n + 1$. Entonces, la partición queda determinada por las clases que se definen como sigue:

- $c_1 = \{1\}$
- $c_2 = \{x \in J_{m,n} : x \sim 1\}$
- $c_3 = \{x \in J_{m,n} : x \sim y, \text{ con } y \in c_2\}$
- $c_i = \{x \in J_{m,n} : x \sim y, \text{ con } y \in c_{i-1} \text{ e } y \notin c_{i-2}\}$
con $4 \leq i \leq \frac{m}{2} + 2$ si m es par y $4 \leq i \leq \frac{m+3}{2}$ si m es impar

Si m es par, las clases desde c_3 a $c_{\frac{m}{2}+1}$ tienen $\frac{2n}{m}$ elementos y c_2 y $c_{\frac{m}{2}+2}$, $\frac{m}{n}$ elementos.



Mientras que si m es impar, las clases desde c_3 a $c_{\frac{m-1}{2}}$ tienen $\frac{2m}{n}$ elementos.



A partir de lo anterior, obtenemos las matrices de adyacencia del cociente, según si

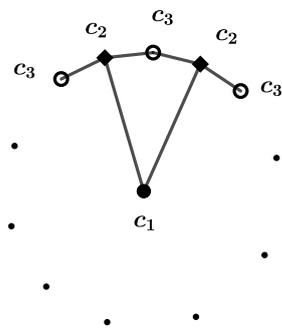
m es par o impar, respectivamente.

$$A(J_{m,n}/\pi) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{n}{m} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}_{(\frac{m}{2}+2) \times (\frac{m}{2}+2)}$$

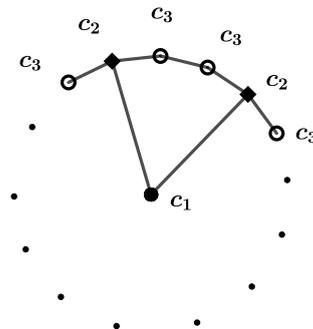
$$A(J_{m,n}/\pi) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{n}{m} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}_{(\frac{m+3}{2}) \times (\frac{m+3}{2})}$$

Ejemplo 3.5.1

Veamos como ejemplo las particiones de $J_{2,n}$ y $J_{3,n}$.



$J_{2,n}/\pi$



$J_{3,n}/\pi$

$$A(J_{2,n}/\pi) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{n}{2} & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad A(J_{3,n}/\pi) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{n}{3} & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

3.5.1. Polinomio característico de las matrices del cociente para m par

Para el cálculo de estos polinomios a los que, por comodidad llamaremos $\pi_{J_{m,n}}(x)$, trabajaremos con las matrices antes calculadas. Comencemos por el caso en que m es par.

$$\pi_{J_{m,n}}(x) = \begin{vmatrix} x & -\frac{n}{m} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & x & -2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & x & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & x & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -2 & x \end{vmatrix}_{\left(\frac{m}{2}+2\right)}$$

Este determinante puede descomponerse en

$$x \begin{vmatrix} x & -2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & x & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & x & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -2 & x \end{vmatrix}_{\left(\frac{m}{2}+1\right)} + \frac{n}{m} \begin{vmatrix} -1 & -2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & x & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & x & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -2 & x \end{vmatrix}_{\left(\frac{m}{2}+1\right)}$$

Observación 3.5.2

Antes de calcular estos determinantes, observemos que el primero de la descomposición, que llamaremos $S(x)$, se obtiene de borrar la fila y columna de la clase formada por el centro. Esto quiere decir, que nos da el polinomio característico del cociente de una partición equitativa del grafo C_n y, por lo tanto, sus raíces serán valores propios de este ciclo.

Mientras que el segundo, que llamaremos $T(x)$, se obtiene de borrar la primera fila y la segunda columna de nuestro determinante original, y luego, podremos desarrollarlo borrando la segunda fila y la primera columna de nuestro determinante original. Por lo tanto, todas sus raíces serán valores propios del grafo $\frac{n}{m}P_{m-1}$. Esto

nos garantiza que ni 2, ni -2 anularán a $T(x)$.

Para calcular $S(x)$, lo descomponemos como sigue

$$S(x) = x \begin{vmatrix} x & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & x & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & x & -1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -2 & x \end{vmatrix}_{\binom{m}{2}} + 2 \begin{vmatrix} -1 & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & x & -1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -2 & x \end{vmatrix}_{\binom{m}{2}}$$

Aplicando aditividad de los determinantes, se puede escribir al primero de esta última descomposición, como la suma de dos determinantes de dos matrices que difieren solo en la última fila:

$$\begin{vmatrix} x & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & x & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & x & -1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & x \end{vmatrix}_{\binom{m}{2}} + \begin{vmatrix} x & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & x & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & x & -1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}_{\binom{m}{2}}$$

Entonces,

$$\begin{vmatrix} x & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & x & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & x & -1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -2 & x \end{vmatrix}_{\binom{m}{2}} = \phi(P_{\frac{m}{2}}, x) + \begin{vmatrix} x & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & x & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & x & -1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}_{\binom{m}{2}}$$

Por otro lado,

$$\begin{vmatrix} x & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & x & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & x & -1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}_{\binom{m}{2}} = \begin{vmatrix} x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & -1 \end{vmatrix}_{\binom{m}{2}-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} x & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & x & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & x & -1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}_{\binom{m}{2}} = -1 \begin{vmatrix} x & -1 & \cdots & 0 \\ -1 & x & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x \end{vmatrix}_{\binom{m}{2}-2} = -\phi(P_{\frac{m}{2}-2}, x)$$

Para terminar de calcular $S(x)$ nos falta calcular

$$\begin{vmatrix} -1 & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & x & -1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -2 & x \end{vmatrix}_{\binom{m}{2}} = -1 \begin{vmatrix} x & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & x & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & x & -1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -2 & x \end{vmatrix}_{\binom{m}{2}-1}$$

Podemos aplicar nuevamente la misma estrategia de antes, concluyendo

$$S(x) = x (\phi(P_{\frac{m}{2}}, x) - \phi(P_{\frac{m}{2}-2}, x)) - 2 (\phi(P_{\frac{m}{2}-1}, x) - \phi(P_{\frac{m}{2}-2}, x))$$

Aplicando la relación de recurrencia entre los polinomios característicos de los caminos vista en la Observación 2.3.8 ($\phi(P_n, x) = x\phi(P_{n-1}, x) - \phi(P_{n-2}, x)$) y operando, llegamos a

$$S(x) = (x^2 - 4) (\phi(P_{\frac{m}{2}-1}, x))$$

Para calcular $T(x)$ podemos trabajar análogamente, obteniendo

$$T(x) = -\frac{n}{m} (\phi(P_{\frac{m}{2}}, x) - \phi(P_{\frac{m}{2}-2}, x)) = -\frac{n}{m} (x\phi(P_{\frac{m}{2}-1}, x) - 2\phi(P_{\frac{m}{2}-2}, x))$$

Podemos expresar, entonces, el polinomio característico del cociente de la partición de la siguiente manera

$$\pi_{J_{m,n}}(x) = x(x^2 - 4) (\phi(P_{\frac{m}{2}-1}, x)) - \frac{n}{m} (x\phi(P_{\frac{m}{2}-1}, x) - 2\phi(P_{\frac{m}{2}-2}, x))$$

Conjetura 3.5.3

Sea el grafo $J_{m,n}$, con m par. Las raíces de

$$\pi_{J_{m,n}}(x) = x(x^2 - 4) \left(\phi \left(P_{\frac{m}{2}-1}, x \right) \right) - \frac{n}{m} \left(x \phi \left(P_{\frac{m}{2}-1}, x \right) - 2 \phi \left(P_{\frac{m}{2}-2}, x \right) \right)$$

son los $\frac{m}{2} + 2$ valores propios restantes de $J_{m,n}$.

Observación 3.5.4

Aunque no se ha podido demostrar esta conjetura, sí se pudo demostrar que las raíces de $\pi_{J_{m,n}}(x)$ no son valores propios de C_m :

Por observación 3.5.2, todas las raíces del primer término son raíces de C_n , mientras que ya sabemos que el segundo no admite las raíces 2 y -2. Pero además, las raíces de $\phi \left(P_{\frac{m}{2}-1}, x \right)$ son de la forma $2 \cos \left(\frac{2\pi j}{m} \right)$ con $j = 1, \dots, \frac{m}{2} - 1$, es decir, admite con multiplicidad 1, todos los valores propios de C_m , salvo 2, -2.

Entonces, alcanza solo con probar que $\phi \left(P_{\frac{m}{2}-1}, x \right)$ y $x \phi \left(P_{\frac{m}{2}-1}, x \right) - 2 \phi \left(P_{\frac{m}{2}-2}, x \right)$ no tienen raíces en común.

Supongamos que sí, entonces $x \phi \left(P_{\frac{m}{2}-1}, x \right) - 2 \phi \left(P_{\frac{m}{2}-2}, x \right)$ admite raíces de $\phi \left(P_{\frac{m}{2}-1}, x \right)$, por lo que $-2 \phi \left(P_{\frac{m}{2}-2}, x \right)$ también debe admitir raíces de $\phi \left(P_{\frac{m}{2}-1}, x \right)$.

Ahora bien, las raíces de $-2 \phi \left(P_{\frac{m}{2}-2}, x \right)$ son de la forma $2 \cos \left(\frac{2\pi j}{m-2} \right)$ con $j = 1, \dots, \frac{m}{2} - 2$, y por lo tanto, es imposible que sean de la forma $2 \cos \left(\frac{2\pi j}{m} \right)$ con $j = 1, \dots, \frac{m}{2} - 1$, por inyectividad de la función $\cos(x)$ en el intervalo $[0, \pi]$.

Por lo tanto, es absurdo suponer que los dos términos de $\pi_{J_{m,n}}(x)$ tengan raíces comunes.

3.5.2. Polinomio característico de las matrices del cociente para m impar

$$\pi_{J_{m,n}}(x) = \begin{vmatrix} x & -\frac{n}{m} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & x & -2 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & x & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & x & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & x & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & x & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & x-1 \end{vmatrix} \binom{m+3}{\frac{m}{2}}$$

Este determinante puede descomponerse en

$$x \begin{vmatrix} x & -2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & x & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & x & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & x-1 \end{vmatrix} \binom{m+1}{2} + \frac{n}{m} \begin{vmatrix} -1 & -2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & x & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & x & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & x-1 \end{vmatrix} \binom{m+1}{2}$$

Observación 3.5.5

Al igual que en el caso m par, observemos que el primer determinante de la descomposición, que llamaremos $S(x)$, se obtiene de borrar la fila y columna de la clase formada por el centro. Esto quiere decir, que nos da el polinomio característico del cociente de una partición equitativa del grafo C_n y, por lo tanto, sus raíces serán valores propios de este ciclo.

Mientras que el segundo, que llamaremos $T(x)$, se obtiene de borrar la primera fila y la segunda columna de nuestro determinante original, y luego, podremos desarrollarlo borrando la segunda fila y la primera columna de nuestro determinante original. Por lo tanto, todas sus raíces serán valores propios del grafo $\frac{n}{m}P_{m-1}$. Esto nos garantiza que ni 2, ni -2 anularán a $T(x)$.

Para calcular $S(x)$, lo descomponemos como sigue

$$S(x) = x \begin{vmatrix} x & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & x & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & x & -1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & x-1 \end{vmatrix} \binom{m-1}{2} + 2 \begin{vmatrix} -1 & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & x & -1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & x-1 \end{vmatrix} \binom{m-1}{2}$$

Aplicando aditividad de los determinantes, se puede escribir al primero de esta última descomposición, como la suma de dos determinantes de dos matrices que difieren solo en la última fila:

$$\begin{vmatrix} x & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & x & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & x & -1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & x \end{vmatrix} \binom{m-1}{2} + \begin{vmatrix} x & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & x & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & x & -1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} \binom{m-1}{2}$$

Entonces,

$$\begin{vmatrix} x & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & x & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & x & -1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & x-1 \end{vmatrix}_{\left(\frac{m-1}{2}\right)} = \phi\left(P_{\frac{m-1}{2}}, x\right) + \begin{vmatrix} x & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & x & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & x & -1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}_{\left(\frac{m-1}{2}\right)}$$

Por otro lado,

$$\begin{vmatrix} x & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & x & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & x & -1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}_{\left(\frac{m-1}{2}\right)} = -1 \begin{vmatrix} x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & x \end{vmatrix}_{\left(\frac{m-3}{2}\right)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} x & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & x & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & x & -1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}_{\left(\frac{m-1}{2}\right)} = -1 \begin{vmatrix} x & -1 & \cdots & 0 \\ -1 & x & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x \end{vmatrix}_{\left(\frac{m-5}{2}\right)} = -\phi\left(P_{\frac{m-5}{2}}, x\right)$$

Para terminar de calcular $S(x)$ nos falta calcular

$$\begin{vmatrix} -1 & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & x & -1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & x-1 \end{vmatrix}_{\left(\frac{m-1}{2}\right)} = -1 \begin{vmatrix} x & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & x & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & x & -1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -2 & x \end{vmatrix}_{\left(\frac{m-3}{2}\right)}$$

Podemos aplicar nuevamente la misma estrategia de antes, concluyendo

$$S(x) = x \left(\phi\left(P_{\frac{m-1}{2}}, x\right) - \phi\left(P_{\frac{m-3}{2}}, x\right) \right) - 2 \left(\phi\left(P_{\frac{m-3}{2}}, x\right) - \phi\left(P_{\frac{m-5}{2}}, x\right) \right)$$

Aplicando la relación de recurrencia entre los polinomios característicos de los caminos vista en la Observación 2.3.8 ($\phi(P_n, x) = x\phi(P_{n-1}, x) - \phi(P_{n-2}, x)$) y operando, llegamos a

$$S(x) = (x - 2) \left(\phi\left(P_{\frac{m-1}{2}}, x\right) + \phi\left(P_{\frac{m-3}{2}}, x\right) \right)$$

Para calcular $T(x)$ podemos trabajar análogamente, obteniendo

$$T(x) = -\frac{n}{m} \left(\phi\left(P_{\frac{m-1}{2}}, x\right) - \phi\left(P_{\frac{m-3}{2}}, x\right) \right)$$

Podemos expresar, entonces, el polinomio característico del cociente de la partición de la siguiente manera

$$\pi_{J_{m,n}}(x) = x(x-2) \left(\phi \left(P_{\frac{m-1}{2}}, x \right) + \phi \left(P_{\frac{m-3}{2}}, x \right) \right) - \frac{n}{m} \left(\phi \left(P_{\frac{m-1}{2}}, x \right) - \phi \left(P_{\frac{m-3}{2}}, x \right) \right).$$

Conjetura 3.5.6

Sea el grafo $J_{m,n}$, con m impar. Las raíces de

$$\pi_{J_{m,n}}(x) = x(x-2) \left(\phi \left(P_{\frac{m-1}{2}}, x \right) + \phi \left(P_{\frac{m-3}{2}}, x \right) \right) - \frac{n}{m} \left(\phi \left(P_{\frac{m-1}{2}}, x \right) - \phi \left(P_{\frac{m-3}{2}}, x \right) \right)$$

son los $\frac{m+3}{2}$ valores propios restantes de $J_{m,n}$.

Observación 3.5.7

Si bien las expresiones de los polinomios anteriores no es explícita, al depender de los polinomios característicos de caminos, que ya son conocidos, colabora al cálculo en cada caso.

En lo que sigue, calcularemos la energía de $J_{m,n}$ para los casos $m = 2, m = 4$ y $m = 6$. Para el primer caso, alcanza calcular $\pi_{J_{2,n}}(x)$, pues por Observación 2.11.13, $J_{m,n}$ tiene más de un valor propio principal y tan solo nos falta conocer 3 valores propios de este grafo, que, además, sabemos que suman cero.

Para los otros dos casos aplicaremos lo visto en la sección 3.4. Además, calcularemos los polinomios $\pi_{J_{m,n}}(x)$, mostrando que, para estos casos, se verifica la Conjetura 3.5.3.

3.6. Espectros y Energías para casos particulares de m

3.6.1. Espectro y Energía de $J_{2,n}$

Como vimos en el Corolario 3.3.6, el espectro de $J_{2,n}$ es el de C_n , salvo 2 y -2, agregando el 0, su radio espectral y su opuesto. Y por Observación 2.11.13 y Teorema 2.11.15, los encontramos en el polinomio característico de la matriz de adyacencia del cociente, vista en la sección anterior:

$$\pi_{J_{2,n}}(x) = x^3 - \left(4 + \frac{n}{2} \right) x$$

Las raíces de este polinomio son $\pm\sqrt{\frac{n}{2}+4}$ y 0.

Es claro que la raíz positiva encontrada es el radio espectral, pues es mayor a 2. Entonces, $Sp(J_{2,n}) = Sp(C_n) - \{2, -2\} \cup \left\{ \sqrt{\frac{n}{2}+4}, 0, -\sqrt{\frac{n}{2}+4} \right\}$.

Por lo tanto, podemos calcular la energía de $J_{m,n}$ en función de la de C_n , que ya vimos en la sección 2.13.

Ya sabemos que n es par. Debemos estudiar por separado los casos $n \equiv 0 \pmod{4}$ y $n \equiv 2 \pmod{4}$, obteniendo:

$$\mathcal{E}(J_{2,n}) = 4 \left(\frac{\cos \frac{\pi}{n}}{\operatorname{sen} \frac{\pi}{n}} - 1 \right) + 2\sqrt{\frac{n}{2}+4} \quad \text{si } n \equiv 0 \pmod{4}$$

$$\mathcal{E}(J_{2,n}) = 4 \left(\frac{1}{\operatorname{sen} \frac{\pi}{n}} - 1 \right) + 2\sqrt{\frac{n}{2}+4} \quad \text{si } n \equiv 2 \pmod{4}$$

3.6.2. Espectro y Energía $J_{4,n}$

Por observación 3.4.4 sabemos que la suma de las cuartas potencias de los valores propios restantes de $J_{4,n}$ es

$$\sum_{i=1}^4 \mu_i^4 = \frac{n}{2} \left(\frac{n}{4} + 4 \right) + 32$$

Como $J_{4,n}$ es bipartito, los 4 valores propios que nos están faltando son dos distintos y sus opuestos. Es decir, el radio espectral θ y su opuesto, y otro valor propio ρ y su opuesto. Ahora, al trabajar con las cuartas potencias obtenemos la ecuación

$$\frac{n}{2} \left(\frac{n}{4} + 4 \right) + 32 = 2\rho^4 + 2\theta^4$$

o la ecuación equivalente

$$\frac{n}{4} \left(\frac{n}{4} + 4 \right) + 16 = \rho^4 + \theta^4 \quad (8)$$

Trabajando también con $\operatorname{tr}(J_{4,n}^2)$ llegamos a la ecuación

$$\frac{n}{4} + 4 = \rho^2 + \theta^2$$

y despejando ρ^2 obtenemos

$$\rho^2 = \frac{n}{4} + 4 - \theta^2$$

Sustituyendo en la ecuación (8) tenemos:

$$\frac{n}{4} \left(\frac{n}{4} + 4 \right) + 16 = \left(\frac{n}{4} + 4 - \theta^2 \right)^2 + \theta^4$$

Operando llegamos a la ecuación

$$2\theta^4 - 2 \left(\frac{n}{4} + 4 \right) \theta^2 + \left(\frac{n}{4} + 4 \right)^2 - \frac{n}{4} \left(\frac{n}{4} + 4 \right) - 16 = 0$$

Teniendo en cuenta que θ es el radio espectral, tomamos de los dos posibles valores para θ^2 el mayor, obteniendo

$$\theta = \sqrt{\frac{n}{8} + 2 + \sqrt{\frac{n^2}{64} + 4}} \quad \text{y} \quad \rho = \sqrt{\frac{n}{8} + 2 - \sqrt{\frac{n^2}{64} + 4}}$$

Por la tanto, $Sp(J_{4,n}) = Sp(C_n) - \{2, 0, -2\} \cup \{\theta, -\theta, \rho, -\rho\}$.

Con estos valores propios que eran los que nos faltaban, podemos calcular la energía de $J_{4,n}$.

$$\mathcal{E}(J_{4,n}) = 4 \left(\frac{\cos \frac{\pi}{n}}{\sin \frac{\pi}{n}} - 1 \right) + 2\sqrt{\frac{n}{8} + 2 + \sqrt{\frac{n^2}{64} + 4}} + 2\sqrt{\frac{n}{8} + 2 - \sqrt{\frac{n^2}{64} + 4}}$$

Observación 3.6.1

Calculemos el polinomio

$$\pi_{J_{4,n}}(x) = x(x^2 - 4)(\phi(P_1, x)) - \frac{n}{4}(x\phi(P_1, x) - 2\phi(P_0, x))$$

Tomando $\phi(P_0, x) = 1$, llegamos a:

$$\pi_{J_{4,n}}(x) = x(x^2 - 4)x - \frac{n}{4}(x^2 - 2) = x^4 - \left(4 + \frac{n}{4}\right)x^2 + \frac{n}{2}$$

Es fácil ver que los valores propios que calculamos antes son las raíces de este polinomio, verificándose la Conjetura 3.5.3.

3.6.3. Espectro y Energía de $J_{6,n}$

Por observación 3.4.4 sabemos que la suma de las cuartas potencias de los valores propios restantes de $J_{6,n}$ es

$$\sum_{i=1}^5 \mu_i^4 = \frac{n}{3} \left(\frac{n}{6} + 4 \right) + 34$$

Como $J_{6,n}$ es bipartito, los 5 valores propios que nos están faltando son dos distintos y sus opuestos y el cero. Es decir, el radio espectral θ , su opuesto, otro valor propio ρ , su opuesto y 0. Ahora, al trabajar con las cuartas potencias obtenemos la ecuación

$$\frac{n}{3} \left(\frac{n}{6} + 4 \right) + 34 = 2\rho^4 + 2\theta^4$$

o la ecuación equivalente

$$\frac{n}{6} \left(\frac{n}{6} + 4 \right) + 17 = \rho^4 + \theta^4 \quad (9)$$

Trabajando también con $tr(J_{6,n}^2)$ llegamos a la ecuación

$$\frac{n}{6} + 5 = \rho^2 + \theta^2$$

y despejando ρ^2 obtenemos

$$\rho^2 = \frac{n}{6} + 5 - \theta^2$$

Sustituyendo en la ecuación (9) tenemos:

$$\frac{n}{6} \left(\frac{n}{6} + 4 \right) + 17 = \left(\frac{n}{6} + 5 - \theta^2 \right)^2 + \theta^4$$

Operando llegamos a la ecuación

$$2\theta^4 - 2 \left(\frac{n}{6} + 5 \right) \theta^2 + \left(\frac{n}{6} + 5 \right)^2 - \frac{n}{6} \left(\frac{n}{6} + 4 \right) - 17 = 0$$

Teniendo en cuenta que θ es el radio espectral, tomamos de los dos posibles valores para θ^2 el mayor, obteniendo

$$\theta = \sqrt{\frac{n}{12} + \frac{5}{2} + \sqrt{\frac{n^2}{144} - \frac{n}{12} + \frac{9}{4}}} \quad \text{y} \quad \rho = \sqrt{\frac{n}{12} + \frac{5}{2} - \sqrt{\frac{n^2}{144} - \frac{n}{12} + \frac{9}{4}}}$$

Por lo tanto, $Sp(J_{6,n}) = Sp(C_n) - \{2, 0, -2\} \cup \{0, \theta, -\theta, \rho, -\rho\}$.

Y la energía de $J_{6,n}$ es

$$\mathcal{E}(J_{6,n}) = 4 \left(\frac{\cos \frac{\pi}{n}}{\sin \frac{\pi}{n}} - 1 \right) + 2\sqrt{\frac{n}{12} + \frac{5}{2} + \sqrt{\frac{n^2}{144} - \frac{n}{12} + \frac{9}{4}}} + 2\sqrt{\frac{n}{12} + \frac{5}{2} - \sqrt{\frac{n^2}{144} - \frac{n}{12} + \frac{9}{4}}}$$

si $n \equiv 0 \pmod{4}$

$$\mathcal{E}(J_{6,n}) = 4 \left(\frac{1}{\sin \frac{\pi}{n}} - 1 \right) + 2\sqrt{\frac{n}{12} + \frac{5}{2} + \sqrt{\frac{n^2}{144} - \frac{n}{12} + \frac{9}{4}}} + 2\sqrt{\frac{n}{12} + \frac{5}{2} - \sqrt{\frac{n^2}{144} - \frac{n}{12} + \frac{9}{4}}}$$

si $n \equiv 2 \pmod{4}$

Observación 3.6.2

Al igual que con $m = 4$, calculemos el polinomio del cociente

$$\pi_{J_{6,n}}(x) = x(x^2 - 4)(\phi(P_2, x)) - \frac{n}{6}(x\phi(P_2, x) - 2\phi(P_1, x)) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \pi_{J_{6,n}}(x) = x(x^2 - 4)(x^2 - 1) - \frac{n}{6}(x(x^2 - 1) - 2x) \Rightarrow$$

$$\pi_{J_{6,n}}(x) = x\left(x^4 - \left(5 + \frac{n}{6}\right)x^2 + 4 + \frac{n}{2}\right)$$

Es fácil ver que los valores propios que calculamos antes son las raíces de este polinomio, verificándose la Conjetura 3.5.3.

3.7. Propiedades de los radios espectrales de los $J_{m,n}$ **3.7.1. Cotas para los radios espectrales de $J_{m,n}$**

Sea ρ el radio espectral de $J_{m,n}$ entonces $\frac{2n}{n+1} \left(1 + \frac{1}{m}\right) \leq \rho \leq n\sqrt{\frac{2(m+1)}{m(n+1)}}$

La cota inferior se calcula a partir del grado promedio (ver [2, pág 33]). Para la superior ver [1, pág 13]

3.7.2. Comparación de los radios espectrales de los Jahangir con igual razón $\frac{n}{m}$

Para lo que sigue, aplicaremos la siguiente proposición, cuya demostración puede encontrarse en [2].

Definición 3.7.1

Sea X un grafo de n vértices y consideremos el grafo X' de $n + 1$ vértices que se obtiene de **subdividir** una arista (es decir, reemplazar la arista $e = xy$ por las dos aristas xz y zy , donde z es un nuevo vértice).

Decimos que e cae en un **final de camino** si $X - \{e\}$ (el grafo que se obtiene de borrar la arista e de X) es desconexo y una de sus componentes conexas es un camino.

Proposición 3.7.2

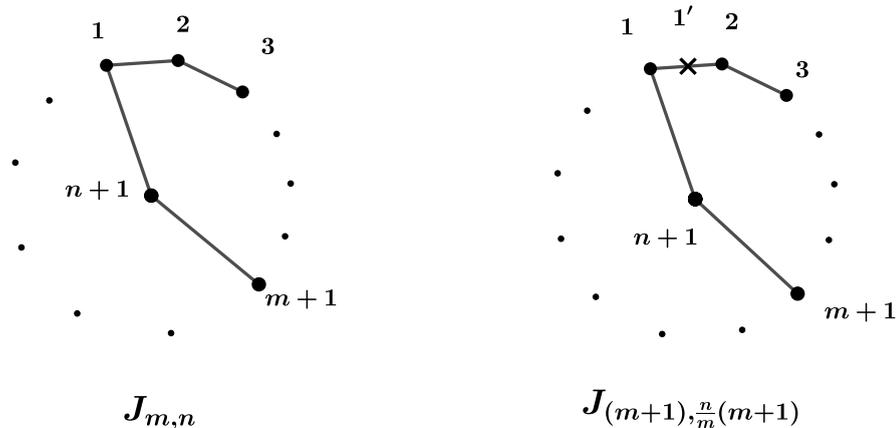
Sea X un grafo conexo, y sea el grafo X' que se obtiene de X subdividiendo una arista e . Sean θ y θ' los mayores valores propios de X y X' , respectivamente. Entonces, si e cae en un final de camino, $\theta' > \theta$. De lo contrario, $\theta' \leq \theta$.

Proposición 3.7.3

Todos los grafos Jahangir con la misma razón $\frac{n}{m}$ se obtienen de subdividir las veces necesarias al grafo $J_{m,n}$ para los menores valores posibles de m y n .

Demostración.

Consideremos un grafo $J_{m,n}$, con los vértices de C_n indexados de 1 a n y el centro $n + 1$.



Si tomamos las aristas determinadas por los vértices de la forma $1 \equiv \text{mod}(m)$ y $2 \equiv \text{mod}(m)$ y las subdividimos, obtenemos un ciclo de $n + \frac{n}{m}$ vértices y un centro, el cual es adyacente a $\frac{n}{m}$ vértices, de tal manera que solo uno de los $m + 1$ vértices consecutivos en el ciclo sea adyacente con el centro.

Como $n + \frac{n}{m} = n \left(\frac{m + 1}{m} \right)$, se tiene $\left(n + \frac{n}{m} \right) : (m + 1) = \frac{n}{m}$.

Por lo tanto, el grafo obtenido es $J_{(m+1), \frac{n}{m}(m+1)}$.

Repitiendo este procedimiento tantas veces como se quiera, se tiene siempre un nuevo Jahangir con más vértices (y aristas) que verifica que la razón $\frac{n}{m}$ no cambia. \square

Corolario 3.7.4

De todos los $J_{m,n}$ con la misma razón $\frac{n}{m}$, el que tiene mayor radio espectral es $J_{2,n}$.

Demostración.

Basta aplicar las proposiciones 3.7.2 y 3.7.3 y la transitividad de " \leq ". \square

Ejemplo 3.7.5

Verifiquemos, a partir de los radios espectrales calculados en las secciones anteriores, que se cumple el corolario anterior. Si consideramos $J_{2,n}$, según este corolario, su radio espectral será mayor que el de $J_{4,2n}$.

Llamemos ρ_2 y ρ_4 a los radios espectrales de $J_{2,n}$ y $J_{4,2n}$ respectivamente.

$$\rho_4 = \sqrt{\frac{2n}{8} + 2 + \sqrt{\frac{4n^2}{64} + 4}} = \sqrt{\frac{n}{4} + 2 + \sqrt{\frac{n^2}{16} + 4}}$$

y como

$$\frac{n^2}{16} + 4 < \left(\frac{n}{4} + 2\right)^2$$

se tiene

$$\rho_4 < \sqrt{2\left(\frac{n}{4} + 2\right)} = \rho_2$$

3.8. Cotas para la Energía de $J_{m,n}$

Proposición 3.8.1

Si m es par y $m \geq 4$ se verifican las siguientes cotas para $E(J_{m,n})$.

$$\mathcal{E}(C_n) - \frac{\mathcal{E}(C_m)}{2} - 2 + \sqrt{\frac{2n}{m} + m + 4} \leq \mathcal{E}(J_{m,n})$$

$$\mathcal{E}(J_{m,n}) \leq \mathcal{E}(C_n) - \frac{\mathcal{E}(C_m)}{2} - 2 + \sqrt{\left(\frac{m}{2} + 2\right) \left(\frac{2n}{m} + m + 4\right)}$$

Demostración.

Usando el caso m par de la Proposición 3.4.2 y Cauchy Schwarz obtenemos la siguiente cadena de desigualdades:

$$\frac{2n}{m} + m + 4 = \sum_{i=1}^{\frac{m}{2}+2} \mu_i^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{\frac{m}{2}+2} |\mu_i| \right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{\frac{m}{2}+2} \mu_i^2 \right) \left(\frac{m}{2} + 2 \right)$$

Aplicando raíz cuadrada en todos los miembros de la cadena, obtenemos

$$\sqrt{\frac{2n}{m} + m + 4} \leq \sum_{i=1}^{\frac{m}{2}+2} |\mu_i| \leq \left(\sum_{i=1}^{\frac{m}{2}+2} \mu_i^2 \right) \left(\frac{m}{2} + 2 \right)$$

Si en todos los miembros de la cadena sumamos $\mathcal{E}(C_n) - \mathcal{E}(C_m) + \frac{\mathcal{E}(C_m) - 4}{2}$, que es lo mismo que $\mathcal{E}(C_n) - \frac{\mathcal{E}(C_m)}{2} - 2$, lo que obtendremos en el miembro del medio es $\mathcal{E}(J_{m,n})$, llegando a la tesis. \square

Proposición 3.8.2

Si m es impar y $m \geq 3$ se verifican las siguientes cotas para $\mathcal{E}(J_{m,n})$.

$$\mathcal{E}(C_n) - \frac{\mathcal{E}(C_m)}{2} - 1 + \sqrt{\frac{2n}{m} + m + 2} \leq \mathcal{E}(J_{m,n})$$

$$\mathcal{E}(J_{m,n}) \leq \mathcal{E}(C_n) - \frac{\mathcal{E}(C_m)}{2} - 1 + \sqrt{\left(\frac{m+3}{2} \right) \left(\frac{2n}{m} + m + 2 \right)}$$

Demostración.

La demostración es análoga a la Proposición 3.8.1 usando el caso m impar de la Proposición 3.4.2. \square

3.9. Trabajo a futuro

Queda, luego de este trabajo, ocuparse de las conjeturas planteadas, así como el explorar en la comparación de las energías de los grafos Jahangir con uno de los parámetros fijos y el otro variable.

También queda planteado el intentar generalizar la definición del grafo Jahangir a otros tipos de grafos. Por ejemplo, agregarle un vértice a un grafo circulante y agregar aristas desde el centro con cierto patrón. Y, a partir de allí, estudiar si se encuentra un comportamiento similar al de los grafos Jahangir.

Referencias

- [1] N. BIGGS, *Algebraic Graph Theory*, Cambridge University Press, Cambridge (1993).
- [2] A.E. BROUWER y W.H. HAEMERS, *Spectra of Graphs*, Springer, New York (2012).
- [3] D.M. CVETCOVIĆ, M. DOOB y H.SACHS, *Spectra of Graphs*, Academic Press, New York (1979)
- [4] C. GODSIL y G. ROYLE, *Algebraic Graph Theory*, Springer, New York (2001).
- [5] R.M. GRAY, *Toeplitz and Circulant Matrices: A review*, Department of Electrical Engineering, Stanford University, Stanford 94305, USA
- [6] I. GUTMAN, *The energy of graph*, Ber. Math. Statist. Sect. Forschungsz. Graz, 103, 1–22 (2015).
- [7] J.H. KOOLEN Y V. MOULTON, *Maximal Energy Graphs*, Adv. Appl. Math. 26 (2001)
- [8] X. LI, Y. SHI y I. GUTMAN, *Graph energy*, Springer-Verlag, New York (2012).
- [9] B.J. MCCLELLAND, *Properties of the latent roots of a matrix: the estimation of π -electron energies*, J. Chem. Phys. 54 640-643(1971).
- [10] H. MINC, *Nonnegative Matrices*, John Wiley & Sons, New York (1988).
- [11] M. K. ZAFAR, A. Q. BAIG, M. IMRAN y A. SEMANICOVÁ-FENOVCIKOVÁ, *Energy of Some Wheel Related Graphs*, Math. Sci. Lett. 4, N° 1, 5-8 (2015).